ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИЙ

УДК330.4(075) JEL C61 *DOI 10.26425/1816-4277-2018-8-99-105*

Аганин Юрий Иванович
канд. физ-мат. наук, ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва
e-mail: *eaganina08@mail.ru*

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ КУРНО

Аннотация. *Рассмотрены три варианта динамической модели дуополии, в которых одна из точек покоя является точкой Курно. Изучается движение в окрестности этих точек и оптимальное управление инвестициями в линейном приближении. Получены уравнения динамики в линейном приближении для равновесного, развивающегося и кризисного рынков. Предложена квазиоптимальная стратегия максимизации по Парето векторного критерия прибыли, использующая, наряду с линеаризацией дифференциальных уравнений динамки в окрестности точки покоя, линейную свертку критериев.*

Ключевые слова: *дуополия, динамическая модель, линеаризация, инвестиция, оптимальное управление.*

Aganin Yuri
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, State University of Management, Moscow
e-mail: *eaganina08@mail.ru*

OPTIMAL CONTROL OF INVESTMENTS AROUND COURNOT POINT

Abstract. *hree variants of the dynamic model of a duopoly are considered. Here's one of the stationary points is the Cournot point. We study the movement around these points and the optimal investment control in a linear approximation. The equations of dynamics of variables for equilibrium, developing and crisis markets in a linear approximation are obtained. A quasi-optimal Pareto maximization strategy for the vector profit criterion, using a linear convolution of the criteria along with the linearization of the differential dynamics equations in the vicinity of the stationary points, is proposed.*

Keywords: *duopoly, dynamic model, linear approximation, investment, optimal control.*

Динамические модели дуополии, учитывающие фондовооруженность труда, инвестиционные и амортизационные процессы отражают существенные характеристики дуопольного рынка и служат основой для постановки оптимизационных задач, позволяющих по-новому подойти к рассмотрению взаимоотношений труда и капитала [1; 2; 3; 4; 5].

Мы рассматриваем случай равновесия, при котором проекция точки покоя на координатную плоскость выпуска конкурирующих фирм является точкой Курно. В окрестности точки покоя возможны неравновесные состояния. В модели неравновесной динамики кроме варианта развивающегося рынка, рассмотренного в [2], также представлен вариант кризисного рынка, в котором предложение превышает спрос, что учитывается при помощи дополнительных параметров модели [1]. Обозначения переменных и связи между ними в основном соответствуют принятым в [1; 2] обозначениям и уравнениям.

В модели равновесной динамики $Y_i = Y_i(t)$, $i = 1; 2$ – выпуск фирм в момент времени t, $t \in [0; T]$; $C_i(Y_i) = m_i Y_i^2 + n_i Y_i + c_i$ – функция полных издержек, $m_i > 0$; $n_i > 0$; $c_i > 0$ – параметры; $K_i = K_i(t)$ – затраты капитала; $L_i = L_i(t)$ – затраты труда; $Y_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1$; – производственная функция; A_i – положительный параметр; α_i –коэффициент эластичности выпуска по капиталу; $p = a - b\ (Y_1 + Y_2)$ – равновесная цена, $a > 0$, $b > 0$ – параметры равновесной цены; $\pi_i(Y_1;\ Y_2) = (a - b\ (Y_1 + Y_2))\ Y_i - C_i(Y_i)$ – равновесная прибыль каждой фирмы; $I_i = s_i \pi_i(Y_1;\ Y_2)$ – капитальные вложения; $S_i = (1 - s_i)\pi_i(Y_1;\ Y_2)$, $0 \le s_i \le 1$ – материальное стимулирование труда; s_i – свободные параметры (управления); τ_i – коэффициент стимулирования труда, выбирается в зависимости от цели управления; λ_{0i} – коэффициент, отражающий уменьшение производительности труда при увеличении числа занятых; точка над переменной величиной – символ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №16-06-00280).

производной по времени; $\dot{L}_i=\lambda_i L_i$ – уравнение динамики использования трудовых ресурсов, где $\lambda_i=\tau_i(1-s_i)\pi_i(Y_1,Y_2)-\lambda_{0i}L_i$; $\dot{K}_i=I_i-\mu_i K_i$ – уравнение динамики капитала, где μ_i коэффициент выбытия капитала; $x_i=K_i/L_i$ – фондовооруженность труда, $\dot{x}_i=s_i\pi_i A_i x_i^{\alpha i}/Y_i-(\mu_i+\lambda_i)\,x_i$ – уравнение динамики фондовооруженности.

В модели неравновесной динамки $Y_D=(a-p)/b$ – спрос; $Y_S=Y_1+Y_2$– предложение; $Y_D/Y_S=\Omega$ – соотношение спроса и предложения; $\dot{p}=\beta\,(a-p-b\,(Y_1+Y_2))$ – уравнение динамики неравновесной цены, где β*, a, b* – положительные параметры, β *b* – коэффициент адаптации цены; $\pi_{1i}(Y_1,\ Y_2,\ p)$ – неравновесная прибыль как непрерывная функция выпуска (Y_1; Y_2) и неравновесной цены: $\pi_{1i}(Y_1,\ Y_2,\ p)=pY_i(1-\theta\,(1-\Omega))-m_iY_i^2\text{-}n_iY_i\text{-}c_i$, где $\theta=0$, если $\Omega\geq 1$; $\theta=1$; , если $\Omega\leq 1$; $\dot{L}_i=\lambda_{1i}L_i$ – уравнение неравновесной динамики использования трудовых ресурсов, где $\lambda_{1i}=\lambda_{1i}(x_i,Y_1,Y_2,p)=(\tau_i(1-s_i)\pi_{1i}(Y_1,\ Y_2,\ p)-\lambda_{0i}Y_i/A_ix_i^{\alpha_i})$. Переменная θ – управляющий параметр; Ω=1 – уравнение поверхности переключения управления θ.

В модели неравновесной динамики с кредитованием $M_i(T)=\int_0^t\Phi_i(\theta,\tau)d\tau$ – сумма кредита, $\Phi_i=\Phi_i(\theta,t)=z_i(t)Y_i(t)(1-\theta\,(1-\Omega\,(t)))$ – интенсивность использования кредита; $\check{C}_{1i}=m\,Y_i^2+n\,Y_i+c_i+\gamma_i\,\Phi_i$ – функция полных издержек; где $\gamma_i>1$; $(\gamma_i-1)\cdot 100\,\%$ – банковский процент; $\pi_{2i}(Y_1,Y_2,z_i,p)=\pi_{1i}(Y_1,Y_2,p)-\gamma_i\,\Phi_i$ – прибыль; $I_i=s_i\pi_{2i}(Y_1,Y_2,z_i,p)+s_i\Phi_i$ – капитальные вложения при наличии кредитования; $S_{2i}=(1-s_i)(\pi_{2i}(Y_1,Y_2,z_i,p)+\Phi_i)$ – материальное стимулирование труда с использованием кредита; $\dot{L}_i=\lambda_{2i}L_i$– уравнение динамики затрат труда в условиях кредитования, где $\lambda_{2i}=\lambda_{2i}(x_i,Y_1,Y_2,z_i,p)=\tau_i(1-s_i)(\pi_{2i}(Y_1,Y_2,z_i,p)+\Phi_i)-\lambda_{0i}Y_i/A_ix_i^{\alpha i})$; $\dot{p}=\beta\,(a-b\,(Y_1+Y_2)+\Phi_1+\Phi_2-p)$ – уравнение динамики цены; $\dot{z}_i=\varepsilon_i\,(z_iY_i\Omega-\gamma_i\,\Phi_i)$ –уравнение динамики использования кредита, где $\varepsilon_i>0$ – параметр, коэффициент адаптации.

Линеаризация уравнений модели равновесной динамики дуополии в окрестности точки Курно.

Движение в модели равновесной динамики дуополии описывается четырьмя дифференциальными уравнениями [2]:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\dfrac{x_i}{Y_i}\left(s_i\pi_iA_ix_i^{\alpha_i-1}-\left(\mu_i+\lambda_i\right)Y_i\right);\\ \dot{Y}_i=\alpha_i\left(s_i\pi_iA_ix_i^{\alpha_i-1}-\left(\mu_i+\lambda_i\right)Y_i\right)+\lambda_iY_i;\quad i=1,2.\end{cases}\tag{1}$$

Пусть система (1.1) имеет точку покоя $M^*(x_1^*;x_2^*;Y_1^*;Y_2^*)$, при заданных величинах $s_i=s_i^*,0<s_i^*<1$, например, $s_i^*=\alpha_i$. В этом случае фазовые переменные и параметры модели удовлетворяют условиям

$$\begin{cases}\alpha_i\pi_i(Y_1,Y_2)A_ix_i^{\alpha_i\text{-}1}-\mu_iY_i=0;\\ \tau_i(1-\alpha_i)\pi_i(Y_1,Y_2)=\lambda_{0i}Y_i\big/A_ix_i^{\alpha_i}\,;\\ \partial\pi_i\big/\partial Y_i=0;\quad i=1,2.\end{cases}\tag{2}$$

Чтобы найти координаты точки M^*сначала вычисляем положительные равновесные по Курно значения выпуска (Y_1^*; Y_2^*), решив линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\partial\pi_1/\partial Y_1=0;\\ \partial\pi_2/\partial Y_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(b+m_1)Y_1+bY_2=a-n_1;\\ bY_1+2(b+m_2)Y_2=a-n_2;\end{cases}\tag{3}$$

$$Y_1^*=\frac{2(a-n_1)(b+m_2)-b(a-n_2)}{3b^2+4b(m_1+m_2)+4m_1m_2}>0;\quad Y_2^*=\frac{2(a-n_2)(b+m_1)-b(a-n_1)}{3b^2+4b(m_1+m_2)+4m_1m_2}>0\ .$$

Положительность значений (Y_1^*; Y_2^*) обеспечивается выполнением неравенств $a-n_1>0$; $a-n_2>0$; $2(a-n_1)(b+m_2)>b(a-n_2)$; $2(a-n_2)(b+m_1)>b(a-n_1)$, выражающих условие существования точки Курно. В частности, если $n_1=n_2=n>0$, $a>n$, эти неравенства выполняются при положительных значениях остальных параметров. Последовательно вычисляем значения

$$\pi_i^*=\pi_i(Y_1^*;Y_2^*)>0;\ \ x_i^*=\left(\frac{\mu_iY_i^*}{\pi_i^*A_i\alpha_i}\right)^{1/(\alpha_i-1)};\ \ \tau_i^*=\frac{\lambda_{0i}Y_i^*}{\pi_i^*A_i(1-\alpha_i)x_i^{\alpha_i}}\ .\tag{4}$$

Постановка задачи. Для системы (1) заданы начальные условия $x_i(0)>0$; $Y_i\,(0)>0$ и граничные значения $x_i^*>0$, $Y_i^*>0$, $s_i^*=\alpha_i$, $i=1, 2$. Требуется выбрать в линейном приближении ограниченные управления $s_i(x_1;\, x_2;\, Y_1;\, Y_2)$, $0\le s_i\le 1$, из условия максимума интегрального критерия

$$\pi^* = \frac{1}{Y_1^* + Y_2^*}\int_0^T (Y_1^*\pi_1 + Y_2^*\pi_2)\,dt \quad . \tag{5}$$

Обозначим малые отклонения фазовых координат и управляющих параметров x_1, x_2, Y_1, Y_2, s_1, s_2 от их равновесных значений x_1^*, x_2^*, Y_1^*, Y_2^*, s_1^*, s_2^* $\tilde{x}_i=x-x_i^*$; $\tilde{y}_i=Y-Y_i^*$; $\tilde{s}_i=s_i-\alpha_i$, $i=1, 2$. Тогда $\pi_i(Y_1, Y_2)=\pi_i(Y_1^*+\tilde{y}_1, Y_2^*+\tilde{y}_2)$ – функция величин $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$. Учтем, что $\left.\dfrac{\partial\pi_i}{\partial Y_i}\right|_M=0$, $\left.\dfrac{\partial\pi_i}{\partial Y_j}\right|_M=-bY_i^*$. Линеаризуем систему (1.2) в окрестности точки $M^*=(x_1^*;\, x_2^*;\, Y_1^*;\, Y_2^*)$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = (A_i\,(x_i^*)^{\alpha_i-1}\alpha_i(\alpha_i-1)\pi_i^*Y_i^* - A_i^{-1}(Y_i^*)(x_i^*)^{-\alpha_i}\alpha_i\lambda_{0i})\tilde{x}_i + (\lambda_{0i}(A_i)^{-1}(x_i^*)^{1-\alpha_i} - \mu_i x_i^*(Y_i^*)^{-1})\tilde{y}_i - \\ -(\alpha_i A_i(x_i^*)^{\alpha_i} - \tau_i^*(Y_i^*)(1-\alpha_i)x_i^*)b\tilde{y}_j + (A_i(x_i^*)^{\alpha_i}(Y_i^*)^{-1} + \tau_i^* x_i^*)\pi_i^*\tilde{s}_i; \\ \dot{\tilde{y}}_i = (A_i\,(x_i^*)^{\alpha_i}\alpha_i(\alpha_i-1)\pi_i^* - A_i^{-1}\lambda_{0i}(Y_i^*)^2(x_i^*)^{-\alpha_i}(x_i^*\alpha_i+(x_i^*)^{-1}))\alpha_i\tilde{x}_i - (\alpha_i\mu_i - A_i^{-1}(x_i^*)^{-\alpha_i}(\alpha_i^2 Y_i^*\lambda_{0i} + Y_i^*\lambda_{0i}))\tilde{y}_i - \\ -(\tau_i^*(1-\alpha_i)^2(Y_i^*)^2 + A_i\alpha_i^2(x_i^*)^{\alpha\text{-}1_i}Y_i^*)b\tilde{y}_j + (\alpha_i A_i + (\alpha_i-1)\tau_i^* Y_i^*)(x_i^*)^{\alpha_i-1}\pi_i^*\tilde{s}_i, \quad i=1;2; \quad j\ne i. \end{cases} \tag{6}$$

Ограниченные кусочно-непрерывные управления $\tilde{s}_i=\tilde{s}_i(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли (1.5), записанного в переменных $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$. Задачу (6) решаем при начальных условиях $x_i(0)=x_i(0)-x_i^*$, $y_i(0)=Y_i(0)-Y_i^*$ и граничных условиях $x_i(T)=y_i(T)=0$.

Линеаризация уравнений развивающегося дуопольного рынка. Движение в модели неравновесной динамики дуополии описывается пятью дифференциальными уравнениями [2], четыре из которых могут быть записаны в форме (1), а пятое $\dot{p}=\beta(a-p-b(Y_1+Y_2))$ – уравнение динамики неравновесной цены:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i Y_i^{-1}\left(s_i\pi_{1i}A_i x_i^{\alpha_i\text{-}1} - \left(\mu_i+\lambda_i\right)Y_i\right); \\ \dot{Y}_i = \alpha_i\left(s_i\pi_{1i}A_i x_i^{\alpha_i\text{-}1} - \left(\mu_i+\lambda_i\right)Y_i\right) + \lambda_i Y_i; \quad i=1, 2 \\ \dot{p} = \beta\,(a-p-b(Y_1+Y_2)). \end{cases} \tag{7}$$

Существенное отличие системы (7) от (1) в том, что выражение прибыли зависит от соотношения спроса и предложения. Поэтому уравнения линейного приближения записываем в двух вариантах, которые условно назовем: вариант развивающегося рынка, для которого спрос не меньше предложения, $\Omega\ge 1$, и вариант кризисного рынка, $\Omega\le 1$. Пусть $M^{+*}(x_1^{+*};\, x_2^{+*};\, Y_1^{+*};\, Y_2^{+*};\, p^{+*})$ – точка покоя системы (7), где $p^{+*}=a-b(Y_1^{+*}+Y_2^{+*})$. Для этой точки выполняется условие равновесия $\Omega=1$. Обозначим M^+ – часть окрестности точки M^{+*}, в которой $\Omega\le 1$. Выражение прибыли в M^+: $\pi_i^+=pY_i-m_iY_i^2-n_iY_i-c_i$, $i=1, 2$; $\pi_i+(Y_i^{+*};\, p^{+*})=\pi_i^{+*}$. Зададим значения $s_i=s_i^*$, $0<s_i^*<1$, например, $s_i^*=\alpha$. В этом случае фазовые переменные и параметры модели неравновесной динамики удовлетворяют условиям (2), в которых вместо выражения равновесной прибыли π_i надо записать π^+. Координаты $(Y_1^{+*},\, Y_2^{+*})$точки Курно развивающегося дуопольного рынка найдем, решив линейную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \partial\pi_1^+/\partial Y_1 = 0; \\ \partial\pi_2^+/\partial Y_2 = 0; \\ p = a-b(Y_1+Y_2); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2m_1Y_1-n_1=0; \\ p-2m_2Y_2-n_2=0; \\ p=a-b(Y_1+Y_2). \end{cases} \tag{8}$$

$Y_1^{+*}=\dfrac{2am_2-n_1(b+2m_2)+n_2b}{4m_1m_2+2b(m_1+m_2)}>0$; $Y_2^{+*}=\dfrac{2am_1-n_2(b+2m_1)+n_1b}{4m_1m_2+2b(m_1+m_2)}>0$ при выполнении неравенств $a-n_1>0$;

$a-n_2>0$; $2m_2(a-n_1)>b(n_1-n_2)$; $2m_1(a-n_2)>b(n_2-n_1)$. Если $n_1\ge n_2$, точка Курно существует при выполнении одного неравенства $2m_2(a-n_1)>b(n_1-n_2)$. Найдем

$$\pi_i^{+*} = \pi_i^{+}(Y_i^{+*};\ p^{+*});\ x_i^{+*} = \left(\frac{\mu_i Y_i^{+*}}{\pi_i^{+*} A_i \alpha_i}\right)^{1/(\alpha_i-1)};\ \tau_i^{+*} = \frac{\lambda_{0i} Y_i^{+*}}{\pi_i^{+*} A_i (1-\alpha_i)(x_i^{+*})^{\alpha_i}}\ ;\ \left.\frac{\partial \pi_i^{+}}{\partial p}\right|_{M^{+*}} = Y_i^{+*}. \tag{9}$$

Введем малые отклонения

$$\tilde{y}_i = Y_i - Y_i^{+*};\ \tilde{x} = x_i - x_i^{+*};\ \tilde{p} = p - p^{+*};\ \tilde{s}_i = s_i - \alpha_i, \tag{10}$$

где $(x_1;\ x_2;\ Y_1;\ Y_2;\ p) \in M^{+}$.

Линеаризуем систему (2.1) в части M^{+} окрестности точки $M^{+*}(x_1^{+*};\ x_2^{+*};\ Y_1^{+*};\ Y_2^{+*};\ p^{+*})$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \left((\alpha_i-1)\pi_i^{+*}(A_i Y_i^{+*})^{-1}(x_i^{+*})^{\alpha_i-1} - \lambda_{0i} A_i^{-1}(x_i^{+*})^{-\alpha_i}\right)\alpha_i \tilde{x}_i + (\lambda_{0i}(A_i)^{-1}(x_i^{+*})^{1-\alpha_i} - \mu_i (Y_i^{+*})^{-1} x_i^{+*})\tilde{y}_i + \\ +(\alpha_i A_i - \tau_i^{+*}(1-\alpha_i) Y_i^{+*}(x_i^{+*})^{1-\alpha_i})(x_i^{+*})^{\alpha_i}\tilde{p} + (A_i + \tau_i^{+*} Y_i^{+*}(x_i^{+*})^{1-\alpha_i})(x_i^{+*})^{\alpha_i}\pi_i^{+*}\tilde{s}_i; \\ \dot{\tilde{y}}_i = \left(\alpha_i^2(\alpha_i-1)\pi_i^{+*} A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i-2} - \alpha_i(1-\alpha_i)(A_i)^{-1}(x_i^{+*})^{-1-\alpha_i} Y_i^{+*}\lambda_{0i}\right)\tilde{x}_i + (\lambda_{0i}(\alpha_i-1)(A_i)^{-1}(x_i^{+*})^{-\alpha_i} Y_i^{+*} - \mu_i\alpha_i)\tilde{y}_i + \\ +(\alpha_i^2 A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i-1} - \tau_i^{+*}(1-\alpha_i)^2 Y_i^{+*}) Y_i^{+*}\tilde{p} + (\alpha_i A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i-1} - \tau_i^{+*} Y_i^{+*}(1-\alpha_i))\pi_i^{+*}\tilde{s}_i,\ i = 1, 2; \\ \dot{\tilde{p}} = -\beta b(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - \beta\tilde{p}. \end{cases} \tag{11}$$

Задача оптимального управления в линеаризованной модели развивающегося дуопольного рынка. Ограниченные кусочно-непрерывные управления $\tilde{s}_i$ в системе (11) выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли, записанного в переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{p}$:

$$\pi_1^{+} = \frac{1}{Y_1^{+*} + Y_2^{+*}}\int_0^T (Y_1^{+*}\pi_{11} + Y_2^{+*}\pi_{12})dt. \tag{12}$$

Задачу оптимального управления решаем при начальных условиях $\tilde{x}_i(0) = x_i(0) - x_i^{+*}$; $\tilde{y}_i(0) = Y_i(0) - Y_i^{+*}$; $\tilde{p}(0) = p(0) - p^{+*}$ и граничных условиях $\tilde{x}_i(T) = \tilde{y}_i(T) = \tilde{p}_i(T) = 0$, $i = 1;\ 2$.

Линеаризация уравнений кризисного дуопольного рынка. Обозначим M^{-} – часть фазового пространства, системы (7), кризисная область, в которой спрос не превосходит предложение, $\Omega \le 1$. Выражение прибыли в этой области: $\pi_i^{-} = Y_i p(a-p)/b(Y_1+Y_2) - m_i Y_i^2 - n_i Y_i - c_i$; $i = 1, 2$. Пусть $M^{-*}x_1^{-*}; x_2^{-*};\ Y_1^{-*};\ Y_2^{-*};\ p^{-*}$ – точка покоя системы (7), где $p^{-*} = a - b(Y_1^{-*} + Y_2^{-*})$. Обозначим $\pi_i^{-}(Y_1^{-*};\ Y_2^{-*};\ p^{-*}) = \pi_i^{-*}$. Зададим значения $s_i = s_i^{*}$, $0 < s_i^{*} < 1$, например, $s_i^{*} = \alpha$. Координаты (Y_1^{-*}, Y_2^{-*}) точки Курно кризисного рынка найдем, решив систему

$$\begin{cases} \partial\pi_1^{-}/\partial Y_1 = 0; \\ \partial\pi_2^{-}/\partial Y_2 = 0 \\ p = a - b(Y_1 + Y_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(a-p)Y_2/b(Y_1+Y_2)^2 - 2m_1 Y_1 - n_1 = 0 \\ p(a-p)Y_1/b(Y_1+Y_2)^2 - 2m_2 Y_2 - n_2 = 0: \\ p = a - b(Y_1 + Y_2) \end{cases} \tag{13}$$

Вычисления упрощаются, если $m_1 = m_2 = m$. Тогда $Y_S^{-*} = Y_1^{-*} + Y_2^{-*} = (a - n_1 - n_2)/(b + 2m) > 0$; $Y_i^{-*} = (aY_S^{-*} - n_i Y_S^{-*} - b(Y_S^{-*})^2)/(a + 2mY_S^{-*} - bY_S^{-*})$.

Координаты $Y_1^{-*} > 0, Y_2^{-*} > 0$, если $a > n_1 + n_2$, так как для положительных значений параметров системы $p^{-*} = a - bY_S^{-*} > n_i <=> 2ma + b(n_1 + n_2) > 2mn_1 + bn_1$. В общем случае для каждого набора параметров имеем не более двух положительных значений равновесного предложения Y_S^{-*} и соответствующих положительных значений $Y_i^{-*} = Y_S^{-*}(a - n_i - bY_S^{-*})/(a + 2m_i Y_S^{-*} - bY_S^{-*})$. Чтобы составить уравнения линейного приближения в окрестности точки покоя M^{-*}, сохраним обозначения малых приращений фазовых переменных (10), заменим символ «+» на «–» и вычислим аналогично (9):

$$x_i^{-*} = \left(\frac{\mu_i Y_i^{-*}}{\pi_i^{-*} A_i \alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i - 1}};\ \tau_i^{-*} = \frac{\lambda_{0i} Y_i^{-*}}{\pi_i^{-*} A_i (1-\alpha_i)(x_i^{-*})^{\alpha_i}};\ \left.\frac{\partial\pi_i^{-}}{\partial p}\right|_{M^{-*}} = \frac{Y_i^{-*}(a - 2p^{-*})}{a - p^{-*}};\ \left.\frac{\partial\pi_i^{-}}{\partial Y_j}\right|_{M^{-*}} = -\frac{Y_i^{-*} p^{-*} b}{a - p^{-*}};\ i \ne j; \tag{14}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \Big((\alpha_i - 1)\pi_i^{-*} A_i (Y_i^{-*})^{-1} (x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - \lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{-*})^{-\alpha_i}\Big) \alpha_i \tilde{x}_i - (\lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{-*})^{1-\alpha_i} - \mu_i A_i (x_i^{-*})(Y_i^{-*})^{-1})\, \tilde{y}_i - \\ -(\alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i} - \tau_i^{-*} x_i^{-*} (1-\alpha_i))\Big(p^{-*}\tilde{y}_j - (a - 2p^{-*}) b^{-1} \tilde{p}\Big)(Y_S^{-*})^{-1} + \pi_i^{-*}(A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i} + \tau_i^{-*} x_i^{-*})(Y_i^{-*})^{-1} \tilde{s}_i; \\ \dot{\tilde{y}}_i = \Big((A_i)^{-1} \lambda_{0i} Y_i^{-*} (x_i^{-*})^{-\alpha_i - 1} - \alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i - 2} \pi_i^{-*}\Big) \alpha_i (1-\alpha_i) \tilde{x}_i - \Big((1-\alpha_i)\lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{-*})^{-\alpha_i} + \mu_i \alpha_i\Big) Y_i^{-*} \tilde{y}_i - \\ -Y_i^{-*}(\alpha_i^2 A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - \tau_i^{-*}(1-\alpha_i)^2)\Big(-p^{-*}\tilde{y}_j + (a - 2p^{-*}) b^{-1}\tilde{p}\Big)(Y_S^{-*})^{-1} + \pi_i^{-*}(\alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - (1-\alpha_i)\tau_i^{-*})\tilde{s}_i; \\ \dot{\tilde{p}} = -\beta b(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - \beta\tilde{p}, \quad i = 1,\ 2. \end{cases} \tag{15}$$

Задача оптимального управления в линеаризованной модели кризисного дуопольного рынка. Ограниченные кусочно-непрерывные управления $\tilde{s}_i$ в системе (15) выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли, записанного в переменных $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$, $\tilde{p}$.

$$\pi_1^- = \frac{1}{Y_1^{-*} + Y_2^{-*}} \int_0^T (Y_1^{-*}\pi_{11}^- + Y_2^{-*}\pi_{12}^-)\,dt. \tag{16}$$

Задачу (15), (16) решаем при начальных условиях $\tilde{x}_i(0) = x_i(0) = x_i^{-*}$; $\tilde{y}_i(0) = Y_i(0) - Y_i^{-*}$; $\tilde{p}(0) = p(0) - p^{-*}$ и граничных условиях $\tilde{x}_i(T) = \tilde{y}_i(T) = \tilde{p}(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Линеаризация уравнений неравновесной динамики развивающегося дуопольного рынка при наличии кредитования.

В [1, 2] рассматривается динамическая модель развивающегося дуопольного рынка, в которой обе фирмы используют кредит. Кредит распределяется между капиталом и трудом в той же пропорции, как и прибыль. Выражение прибыли учитывает издержки по возврату кредита. Динамику развивающегося и кризисного рынков при наличии кредитования опишем системой семи дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = s_i \cdot \pi_{2i} + \Phi_i) A_i x_i^{\alpha_i} Y_i^{-1} - (\mu_i + \lambda_{2i}) x_i; \\ \dot{Y}_i = \alpha_i \left(s_i \cdot \pi_{2i} + \Phi_i) A_i x_i^{\alpha_i - 1} - (\mu_i + \lambda_{2i}) Y_i\right) + \lambda_{2i} Y_i; \\ \dot{z}_i = \varepsilon_i (z_i Y_i \Omega - \gamma_i \Phi_i),\ i = 1, 2; \\ \dot{p} = \beta(a - b(Y_1 + Y_2) + \Phi_1 + \Phi_2 - p), \end{cases} \tag{17}$$

которая отличается от системы (7) увеличением количества уравнений и параметров: дополнительно вводятся величины z_i; γ_i; $\Phi_i = z_i Y_i (1 - \theta(1 - \Omega))$, характеризующие использование и возврат кредита. ОбозначимM^+ – часть фазового пространства, системы (17), область развития, в которой спрос не меньше предложения: $\Omega \geq 1$. В этой области $\theta = 0$; $\Phi_i^+ = z_i Y_i$, выражение прибыли: $\pi_{2i}^+ = pY_i - m_i Y_i^2 - n_i Y_i - c_i - \gamma_i z_i Y_i$, $i - 1, 2$. Пусть $M^{+\Theta}(x_1^{+\Theta}; x_2^{+\Theta}; Y_1^{+\Theta}; Y_2^{+\Theta}; z_1^{+\Theta}; z_2^{+\Theta}; p^{+\Theta})$– точка покоя системы (17) в области M^+, где $p^{+\Theta} = a - b(Y_1^{+\Theta} + Y_2^{+\Theta})$; $z_1^{+\Theta} = z_2^{+\Theta} = 0$. Зададим граничные значения $s_i = s_i^{+\Theta}$, $0 < s_i^{+\Theta} < 1$ например, $s_i^{+\Theta} = \alpha$. Обозначим $\pi_{2i}^+(Y_1^{+\Theta}; p^{+\Theta}; z_i^{+\Theta} = \pi_i^{+\Theta}$. Координаты $(Y_1^{+\Theta}, Y_2^{+\Theta})$ точки Курно развивающегося дуопольного рынка при наличии кредитования совпадают с решением (Y_1^{+*}, Y_2^{+*}) системы (8), поэтому $p^{+\Theta} = p^{+*}$; $x_i^{+\Theta} = x_i^{+*}$; $\pi_i^{+\Theta} = \pi_i^{+*}$. Обозначим $z_i = z_i - z_i^{+\Theta}$; $\Omega^{+\Theta} = (a - p^{+\Theta})/b(Y_1^{+\Theta} + Y_2^{+\Theta})$, найдем $\left.\frac{\partial \pi_{2i}^+}{\partial p}\right|_{M^{+\Theta}} = \left.\frac{\partial \Phi_i^+}{\partial z_i}\right|_{M^{+\Theta}} = Y_i^{+*}$; $\left.\frac{\partial \pi_{2i}^+}{\partial z_i}\right|_{M^{+\Theta}} = -\gamma_i Y_i^{+*}$. Линеаризуем систему (17) в части окрестности точки , используя обозначения малых отклонений (10):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \Big((\alpha_i - 1)\pi_i^{+*} A_i (Y_i^{+*})^{-1} (x_i^{+*})^{\alpha_i - 1} - \lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{+*})^{-\alpha_i}\Big)\alpha_i \tilde{x}_i + (\lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{+*})^{1-\alpha_i} - \mu_i x_i^{+*})\tilde{y}_i + (\alpha_i A_i - \\ -\tau_i^{+*}(1-\alpha_i) Y_i^{+*} (x_i^{**})^{1-\alpha_i})(x_i^{+*})^{\alpha_i}\, \tilde{p} + (A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i} + \tau_i^{+*} Y_i^{+*} x_i^{+*})\pi_i^{+*}\tilde{s}_i + ((1-\alpha_i\gamma_i) A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i} - \tau_i^{+*} x_i^{+*}(\alpha_i\gamma_i - \alpha_i - \gamma_i))\tilde{z}_i; \\ \dot{\tilde{y}}_i = \Big(\alpha_i \pi_i^{+*} A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i - 2} + Y_i^{+*}\lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{+*})^{-1-\alpha_i}\Big)\alpha_i(\alpha_i - 1)\tilde{x}_i + (\alpha_i - 1) Y_i^{+*}\lambda_{0i} (A_i)^{-1} (x_i^{+*})^{-\alpha_i} - \mu_i\alpha_i\tilde{y}_i + (\alpha_i^2 A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i - 1} - \\ -\tau_i^{+*}(1-\alpha_i)^2 Y_i^{+*}) Y_i^{**}\tilde{p} + (\alpha_i A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i - 1} - \tau_i^{+*} Y_i^{+*}(1-\alpha_i))\pi_i^{+*}\tilde{s}_i + ((1-\alpha_i\gamma_i) A_i (x_i^{+*})^{\alpha_i - 1} + \tau_i^{+*}(1-\alpha_i)(\alpha_i\gamma_i - \alpha_i - \gamma_i)) Y_i^{+*}\tilde{z}_i; \\ \dot{\tilde{z}}_i = \varepsilon_i(\Omega^{+*} - \gamma_i) Y_i^{+*}\tilde{z}_i; \qquad i = 1, 2; \\ \dot{\tilde{p}} = -\beta(b(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - (Y_1^{+*}\tilde{z}_1 + Y_2^{+*}\tilde{z}_2) + \tilde{p}). \end{cases} \tag{18}$$

Задача оптимального управления в линеаризованной модели развивающегося дуопольного рынка при наличии кредитования. Ограниченные кусочно–непрерывные управления $\tilde{s}_i$ в системе (18) выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли, записанного в переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{p}$:

$$\pi_2^+ = \frac{1}{Y_1^{+*} + Y_2^{+*}} \int_0^T (Y_1^{+*}\pi_{21}^+ + Y_2^{+*}\pi_{22}^+)dt. \tag{19}$$

Задачу решаем при начальных условиях $\tilde{x}_i(0) = x_i(0) - x_i^{+*}$; $\tilde{y}_i(0) = Y_i(0) - Y_i^{+*}$; $\tilde{p}_i(0) = p_i(0) - p_i^{+*}$; $\tilde{z}(0) = z(0)$ и граничных условиях $\tilde{x}_i(T) = \tilde{y}_i(T) = \tilde{p}_i(T) = z(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Линеаризация уравнений неравновесной динамики кризисного дуопольного рынка при наличии кредитования.

Обозначим M^- – область фазового пространства системы (17), в которой предложение не меньше спроса: $\Omega \le 1$. В этой области $\theta = 1$; $\Phi_i^- z_i Y_i \Omega = z_i Y_i (a-p)/b(Y_1 + Y_2)$; выражение прибыли: $\pi^-_{2i} = p(a-p) Y_i/b(Y_1 + Y_2) - m_i Y_i^2 - n_i Y_i - c_i - \gamma_i z_i Y_i$, $i = 1, 2$. Пусть $M^{+\Theta}(x_1^{-\Theta}; x_2^{-\Theta}; Y_1^{-\Theta}; Y_2^{-\Theta}; z_1^{-\Theta}; z_2^{-\Theta}; p^{-\Theta})$ – точка покоя системы (3.1) в области M^-, где $p^{-\Theta} = a - b(Y_1^{-\Theta} + Y_2^{-\Theta})$; $z_1^{-\Theta} = z_2^{-\Theta} = 0$. Зададим граничные значения $s_i = s_i^{-\Theta}$, $0 < s_i^{-\Theta} < 1$, например, $s_i^{-\Theta} = \alpha_i$. Обозначим $\pi^-_{2i}(Y_1^{-\Theta}; Y_2^{-\Theta}; p^{-\Theta}; z_i^{-\Theta}) = \pi_i^{-\Theta}$. Координаты $(Y_1^{-\Theta}, Y_2^{-\Theta})$ точки Курно кризисного дуопольного рынка при наличии кредитования совпадают с решением (Y_1^{-*}, Y_2^{-*}) системы (2.7), поэтому $p^{-\Theta} = p^{-*}$; $x_i^{-\Theta} = x_i^{-*}$; $\pi_i^{-\Theta} = \pi_i^{-*}$. Обозначим $z_i = z$; $\Omega^{-\Theta} = (a - p^{-*})/b(Y_1^{-*} + Y_2^{-*})$, найдем

$$\left.\frac{\partial \pi_{2i}^-}{\partial Y_j}\right|_{M^{-\Theta}} = \frac{-p^{-*}Y_i^{-*}}{Y_1^{-*} + Y_2^{-*}};\ \left.\frac{\partial \pi_{2i}^-}{\partial z_i}\right|_{M^{-\Theta}} = \Omega^{-\Theta}\gamma_i Y_i^{-*}\ ;\ \left.\frac{\partial \pi_{2i}^-}{\partial p}\right|_{M^{-\Theta}} = \frac{Y_i^{-*}\left(a - 2p^{-*}\right)}{b(Y_1^{-*} + Y_2^{-*})},\ \left.\frac{\partial \Phi_i^-}{\partial z_i}\right|_{M^{-\Theta}} = Y_i^{-*}\Omega^{-\Theta}. \tag{20}$$

Уравнения линейного приближения в части M^- окрестности точки покоя $M^{-\Theta}$ можно записать аналогично (18), заменив выражения Φ_i^+; π_{2i}^+ на $\Phi_i^- = z_i Y_i \Omega$; $\pi_{2i}^-(Y_1^{\Theta}, Y_2^{\Theta}; 0; p^{\Theta}) = \pi_i^{-*}$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \Big((\alpha_i - 1)\pi_i^{-*} A_i (Y_i^{-*})^{-1} (x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - \lambda_{0i}(A_i)^{-1}(x_i^{-*})^{-\alpha_i}\Big)\alpha_i \tilde{x}_i - (\lambda_{0i}(A_i)^{-1}(x_i^{-*})^{1-\alpha_i} - \mu_i A_i (x_i^{-*})(Y_i^{-*})^{-1})\,\tilde{y}_i - \\ -(\alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i} - \tau_i^{-*} x_i^{-*}(1-\alpha_i))\Big(p^{-*}\tilde{y}_j - (a - 2p^{-*})b^{-1}\tilde{p}\Big)(Y_S^{-*})^{-1} + \pi_i^{-*}(A_i(x_i^{-*})^{\alpha_i} + \tau_i^{-*}x_i^{-*})(Y_i^{-*})^{-1}\tilde{s}_i - \\ -((\Omega^{-*}\alpha_i\gamma_i - 1)A_i(x_i^{-*})^{\alpha_i} + \tau_i^{-*}(1-\alpha_i)\gamma_i x_i^{-*}\Omega^{**} + x_i^{-*}\Omega^{-*})\tilde{z}_i; \\ \dot{\tilde{y}}_i = \Big((A_i)^{-1}\lambda_{0i} Y_i^{-*}(x_i^{-*})^{-\alpha_i - 1} - \alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i - 2}\pi_i^{-*}\Big)\alpha_i(1-\alpha_i)\tilde{x}_i - \Big((1-\alpha_i)\lambda_{0i}(A_i)^{-1}(x_i^{-*})^{-\alpha_i} + \mu_i\alpha_i\Big)Y_i^{-*}\tilde{y}_i - \\ -Y_i^{-*}(\alpha_i^2 A_i(x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - \tau_i^{-*}(1-\alpha_i)^2)\Big(-p^{-*}\tilde{y}_j + (a - 2p^{-*})b^{-1}\tilde{p}\Big)(Y_S^{-*})^{-1} + \pi_i^{-*}(\alpha_i A_i (x_i^{-*})^{\alpha_i - 1} - (1-\alpha_i)\tau_i^{-*})\tilde{s}_i - \\ -((\Omega^{-*}\alpha_i\gamma_i - 1)A_i(x_i^{-*})^{\alpha_i - 1}\alpha_i + \tau_i^{-*}(1-\alpha_i)^2\gamma_i\Omega^{-*} + \Omega^{-*}(1-\alpha_i))Y_i^{-*}\tilde{z}_i; \\ \dot{\tilde{z}}_i = \varepsilon_i(1-\gamma_i)\Omega^{-*}Y_i^{-*}\tilde{z}; \\ \dot{\tilde{p}} = -\beta(b(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - (\tilde{z}_1 Y_1^{-*} + \tilde{z}_2 Y_2^{-*})\Omega^{-*} + \tilde{p}), \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{21}$$

Задача оптимального управления в линеаризованной модели кризисного дуопольного рынка при наличии кредитования. Ограниченные кусочно–непрерывные управления $\tilde{s}_i$, выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли, записанного в переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, p$:

$$\pi_2^- = \frac{1}{Y_1^{-*} + Y_2^{-*}} \int_0^T (Y_1^{-*}\pi_{21}^- + Y_2^{-*}\pi_{22}^-)dt\,. \tag{22}$$

Задачу (21),(22) решаем при начальных условиях $\tilde{x}_i(0) = x_i(0) = x_i^{-*}$; $\tilde{y}_i(0) = Y_i(0) = Y_i^{-*}$; $p(0) = p(0) - \tilde{p}^{-*}$; $\tilde{z}(0) = z(0)$ и граничных условиях $\tilde{x}_i(T) = \tilde{y}_i(T) = \tilde{p}_i(T) = z(T) = 0$, $i = 1, 2$.

Таким образом, нами рассмотрены задачи линеаризации в трех динамических моделях дуополии. Получены уравнения линейного приближения для равновесного, развивающегося и кризисного рынка. Поставлена задача оптимального управления инвестициями в линейном приближении Каждая последующая модель включает основные элементы предыдущей модели. Поэтому квазиоптимальная траектория решения задачи с кредитованием может быть составлена из трех участков: неравновесное движение с кредитованием к области самофинансирования, движение в области самофинансирования при неравновесной цене к области равновесия и движение к точке Курно в области самофинансирования при равновесии спроса и предложения.

Библиографический список.

1. Аганин, Ю. И. Влияние фондовооруженности на устойчивость движения в динамической модели дуополии // Вестник университета. – 2013. – №. 16. – С. 120-126.
2. Аганин, Ю. И. Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях дуополии // Вестник университета. ФГБОУ ВПО «Государственный университет управления». – 2017. – № 7-8. – С. 146-152.
3. Лебедев, В. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М.: ООО «Тест», 2011. – 336 с.
4. Alpha, C. Chiang. Fundamental methods of mathematical economics. 2d ed. – McGraw Hill Book Company, New York, 1974. – 784 p.
5. Shone, R. Economic Dynamics. Phase Diagrams and their Economic Applications. 2d ed. Cambridge University Press 2002. – 708 p.

References

1. Aganin Y. I. Vlijanie fondovoorujennosti na ustoichivost dvijeniya v dinamicheskoi modeli duopolii [*Kapital-Labor Ratio and Stability of trajectory in a dynamic models of duopoly*] // Vestnik Universiteta [*Vestnik universiteta*], 2013, I. 16, p. 120-126.
2. Aganin Y. I. Optimalnoe upravlenie investiziyami v dinamicheskih modelyah duopolii [*Optimal Control of investments in a dynamic models of duopoly*]. Vestnik Universiteta [*Vestnik universiteta*], 2017, I. 7-8, p. 146-152.
3. Lebedev V. V., Lebedev K. V. Matematicheskoe modelirovanie nestazionarnih ekonomicheskih prozessov [*Mathematikal modeling of non-stationary economic process*]. M.: OOO «Test», pp. 2011-336.
4. Alpha C. Chiang. Fundamental methods of mathematical economics. 2d ed. McGraw Hill Book Company, New York, 1974. 784 p.
5. Shone R. Economic Dynamics. Phase Diagrams and their Economic Applications. 2d ed. Cambridge University Press 2002. 708 p.