
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 330.4 (075)

Ю.И. Аганин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МОНОПОЛИИ¹

Аннотация. Рассмотрены задачи максимизации прибыли в трех динамических моделях монополии. Сначала строится модель, которая характеризует выпуск продукции, фондовооруженность труда при равновесии спроса и предложения. Затем модель усложняется: движение товара на рынке происходит при неравновесной цене, и, наконец, ставится задача оптимального использования кредита.

Ключевые слова: монополия, спрос, цена, кредит, фондовооруженность, рабочая сила, оптимальное управление.

Yuri Aganin

OPTIMAL CONTROL IN A DYNAMIC MODELS OF MONOPOLY

Annotation. The article studies profit maximization in three dynamic models of monopoly. The first one describes the dynamics of production and capital-labor ratio with equilibrium price, the second – the same amounts with non-equilibrium price and finally the third one analyzes the external financing of capital expenditures and working capital.

Keywords: monopoly, demand, price, external financing, capital-labor ratio, labor, optimal control.

Рассматриваются модели монополии, в которых выпуск задан производственной функцией Кобба-Дугласа [4; 6; 12; 13; 14]. Прибыль распределяется в каждый момент времени между трудом и капиталом в пропорции, величина которой – свободный параметр (управление). Динамика фондовооруженности описывается дифференциальным уравнением, аналогичным уравнению Солоу [13; 14]. В уравнении динамики затрат труда учитываются уменьшение производительности труда при увеличении числа занятых и стимулирование труда, приводящее к увеличению человеческого капитала [13]. Поставлена задача максимизации прибыли. Используется методика, предложенная В.В. Лебедевым [7; 8; 9].

1. **Оптимальное управление в равновесной модели монополии.** Предполагается:

1) Потребитель заказывает в момент времени t календарного периода $0 \leq t \leq T$ продукцию фирмы в количестве $Y = Y(t)$ единиц, а производственные мощности фирмы обеспечивают выполнение заказа в каждый момент времени.

2) Функция полных издержек C фирмы задается равенством $C = mY^2 + nY + c$ с положительными коэффициентами (параметрами) m, n, c .

3) Объем производимой продукции описывается производственной функцией Кобба – Дугласа $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, где $K = K(t)$ – затраты капитала; $L = L(t)$ – затраты труда; A – положительный параметр; α – эластичность выпуска по капиталу. Обозначим $x = K/L$ фондовооруженность труда. Тогда $L = Y/Ax^\alpha$ и $Y = Ax^{\alpha-1}K$.

4) Функция прибыли фирмы выражается равенством: $\pi(Y) = pY - C$, где равновесная цена p определяется равенством $p = a - bY$ с положительными параметрами a, b . Следовательно, $\pi(Y) = -(b+m)Y^2 + (a-n)Y - c$.

© Аганин Ю.И., 2016

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №16-06-00280).

5) Прибыль используется для капитальных вложений (инвестиций) в производство $I(Y) = s\pi(Y)$ и для стимулирования труда $S(Y) = (1-s)\pi(Y)$; $0 \leq s \leq 1$, где s – свободный параметр (управление).

6) Динамика затрат труда задается дифференциальным уравнением $\dot{L} = (\tau(1-s)\pi(Y) - \lambda_0 L)L$, где точка над символом переменной означает производную по времени; $\lambda_0 > 0$ – параметр, отражающий уменьшение производительности труда при увеличении числа занятых, $\tau > 0$ – коэффициент стимулирования труда. Обозначим $\lambda_1(x, Y, s) = \tau(1-s)\pi(Y) - \lambda_0 Y / Ax^a$.

7) Динамика основных производственных фондов (капитала K) задается дифференциальным уравнением $\dot{K} = I - \mu K$, где μ – коэффициент амортизации.

8) Динамика фондовооруженности $x = K/L$ описывается уравнением [3; 8]

$$\dot{x} = \dot{K}/L - K\dot{L}/L^2 \Rightarrow \dot{x} = s\pi(Y)Ax^a/Y - (\mu + \lambda_1(x, Y, s))x. \quad (1.1)$$

9) Динамика выпуска продукции фирмы описывается уравнением, которое следует из предположений 2) – 7). Подставляя в равенство $\dot{Y} = A\alpha K^{a-1}L^{1-a}\dot{K} + A(1-\alpha)K^aL^{-a}\dot{L}$ выражения $x = K/L$; $\dot{K} = I - \mu K$; $\dot{L} = \lambda_1(x, Y, s)L$; $AK^{a-1}L^{1-a} = Y$; $Ax^aL = Y$; $Ax^{a-1}K = Y$, получим

$$\dot{Y} = \alpha Ax^{a-1}s\pi(Y) + ((1-\alpha)(\lambda_1(x, Y, s) - \alpha\mu)Y). \quad (1.2)$$

10) Ограниченное кусочно-непрерывное управление $s = s(x, Y)$, выбирается из условия максимума интегральной прибыли π_1 :

$$\pi_1 = \int_0^T \pi(Y(t))dt. \quad (1.3)$$

Управление динамикой выпуска сводится к решению задачи оптимального управления в нелинейной системе

$$\begin{cases} \dot{x} = xY^{-1}(s\pi(Y)Ax^{a-1} - (\mu + \lambda_1(x, Y, s))Y), \\ \dot{Y} = \alpha(s\pi(Y)Ax^{a-1} - (\mu + \lambda_1(x, Y, s))Y) + \lambda_1(x, Y, s)Y \end{cases} \quad (1.4)$$

с критерием (1.3). Система решается при положительных начальных условиях $x(0) = x_0$, $Y(0) = Y_0$. Граничное значение управления $s(T) = \alpha$. Граничные значения фондовооруженности $x(T) = x_1$, выпуска $Y(T) = Y_1$ могут быть выбраны как координаты устойчивой точки покоя (положения равновесия) системы (1.4): эти величины удовлетворяют условиям: $\lambda_1(x_1, Y_1, \alpha) = 0$, $x_1 = \alpha\lambda_0/\mu\tau(1-\alpha)$. В частности, если выбраны значения параметров

$$A = 1; m = 0,5; n = 10; c = 5000; a = 210; b = 0,5; \mu = 0,1; \alpha = 0,6; \lambda_0 = 10; \tau = 0,96225 \cdot 10^{-4}, \quad (1.5)$$

то координаты устойчивой точки покоя $x_1 = 1,5588 \cdot 10^6$; $Y_1 = 100$. Граничное значение функции прибыли $\pi(100) = \pi_{\max} = 5000$. Выпуск $Y_1(T) = 100$ обеспечивает максимум плотности потока прибыли в точке покоя.

2. Оптимальное управление в неравновесной модели монополии. Рассмотрим модель, которая учитывает возможные отклонения предложения от спроса. Сохраняем все допущения предыдущей модели, кроме первого и четвертого. Предполагается, что в каждый момент времени товар в количестве Y продается по цене $p(t)$, динамика изменения которой описывается дифференциальным уравнением $\dot{p} = \beta(a - p - bY)$, где βb – коэффициент адаптации цены, и $p(0) = p_0$. Это

уравнение дополняет систему (1.4), описывающую предыдущий вариант модели, в которой не рассматривались отклонения цены от ее равновесного значения. Функцию прибыли удобно записать, используя величину θ , которая принимает значения 0 или 1 в зависимости от соотношения спроса $(a-p)/b \geq 0$ и предложения $Y > 0$: $\theta=0$, если $(a-p)/b \geq Y$; $\theta=1$, если $(a-p)/b \leq Y$. Прибыль – непрерывная функция аргументов Y, p :

$$\pi(Y, p) = pY(1 - \theta(1 - \frac{a-p}{bY})) - mY^2 - nY - c \quad (2.1)$$

Выражение функции прибыли в новой модели подставим в уравнения динамики капитала $\dot{K} = s\pi(Y, p) - \mu K$ и затрат труда $\dot{L} = (\tau(1-s)\pi(Y, p) - \lambda_0 Y / Ax^a) Y / Ax^a$. Обозначим $\lambda_2(x, Y, p, s) = \tau(1-s)\pi(Y, p) - \lambda_0 Y / Ax^a$. В полученной системе

$$\begin{cases} \dot{x} = xY^{-1} (s\pi(Y, p)Ax^{a-1} - (\mu + \lambda_2(x, Y, p, s))Y) \\ \dot{Y} = \alpha (s\pi(Y, p)Ax^{a-1} - (\mu + \lambda_2(x, Y, p, s))Y) + \lambda_2(x, Y, p, s)Y \\ \dot{p} = \beta(a - bY - p) \end{cases} \quad (2.2)$$

ограниченное кусочно–непрерывное управление $s(x, Y, p)$ выбирается из условия максимума интегральной прибыли π_2 :

$$\pi_2 = \int_0^T \pi(Y(t), p(t))dt. \quad (2.3)$$

Задача оптимального управления решается с положительными начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0, p(0) = p_0$. Граничные значения: фондовооруженности $x(T) = x_1$; выпуска $Y(T) = Y_1$; цены $p(T) = a - bY_1 = p_1$ могут быть выбраны как координаты устойчивой точки покоя системы (2.2). Эти величины удовлетворяют условиям: $s(T) = \alpha$; $\lambda_2(x_1, Y_1, p_1, \alpha) = 0$, $x_1 = (\alpha \lambda_0 / \mu \tau(1 - \alpha))$. Отметим, что пары $(x_1; Y_1)$ для систем (2.2) и (1.4) одинаковые. В частности, если выбраны значения параметров (1.5), то граничное значение выпуска $Y_1(T) = 100$ обеспечивает условный максимум плотности потока прибыли при условии $p = a - bY$.

3. Оптимальное использование кредита в неравновесной модели монополии. Рассмотрим динамическую модель монополии, в которой развитие производства связано с необходимостью

привлечения кредита $Z(T) = \int_0^T z(\tau)Y(\tau)d\tau$, где сумма кредита равна $Z(T)$, интенсивность использова-

ния кредита равна $z(t)Y(t)$. Сохраняем все предположения предыдущей модели, дополнив новыми допущениями, отражающими использование и погашение кредита. В новой модели функция полных издержек задана выражением $C = mY^2 + nY + c + \gamma zY$, где параметр γ учитывает погашение кредита $\gamma Z(T)$; $\gamma > 1$; $(\gamma - 1) \cdot 100\%$ – банковский процент. Финансовый поток $zY = szY + (1-s)zY$ распределяется между капиталом szY и трудом $(1-s)zY$ в той же пропорции, как и прибыль. Предполагается, что рост рабочей силы зависит не только от величины выпуска, но и от доли кредита, используемой для стимулирования труда. Использование кредита учитывается в уравнении динамики затрат труда $\dot{L} = \lambda_3(x, Y, p, z, s) \cdot L$, где

$\lambda_3(x, Y, p, z, s) = \tau(1-s)(\pi(Y, p, z) + zY) - \lambda_0 Y / Ax^\alpha$. Соответственно изменяются: функция прибыли $\pi(Y, p, z) = \pi(Y, p) - \gamma zY$; инвестиции $I = s\pi(Y, p, z) + szY$. Уравнение динамики цены $\dot{p} = \beta(a - (b - z)Y - p)$ учитывает распределение кредита $z(t)Y(t)$: цена растет при увеличении использования кредита, обусловленного увеличением спроса. Интенсивность $z(t)$ использования кредита задается дифференциальным уравнением $\dot{z} = \varepsilon z(d - \gamma Y)$, где $\varepsilon > 0$ – константа, d – прогнозируемая средняя величина спроса [1; 2]. В задаче оптимального управления системой

$$\begin{cases} \dot{x} = xY^{-1}((s\pi(Y, p, z) + \sigma zY)Ax^{\alpha-1} - (\mu + \lambda_3(x, Y, p, z, s))Y) \\ \dot{Y} = \alpha((s\pi(Y, p, z) + \sigma zY)Ax^{\alpha-1} - (\mu + \lambda_3(x, Y, p, z, s))Y) + \lambda_3(x, Y, p, z, s)Y \\ \dot{z} = \varepsilon z(d - \gamma Y) \\ \dot{p} = \beta(a - (b - z)Y - p) \end{cases} \quad (3.1)$$

кусочно-непрерывное управление $s(x, Y, p, z)$ выбирается из условия максимума интегральной прибыли

$$\pi_3 = \int_0^T \pi(Y(t), p(t), z(t))dt. \quad (3.2)$$

Динамическая система (3.1) отличается от системы (2.1) тем, что вводятся величины z, γ , характеризующие распределение и возврат кредита. Задача оптимального управления решается с положительными начальными условиями $x(0) = x_0, Y(0) = Y_0, p(0) = p_0, z(0) = z_0$. Граничные значения: фондовооруженности $x(T) = x_1$, выпуска $Y(T) = Y_1$, цены $p(T) = a - bY_1 = p_1, z(T) = 0$ могут быть выбраны как координаты точки покоя системы (3.1). Эти величины удовлетворяют условиям: $s(T) = \alpha; \lambda_3(x_1, Y_1, p_1, 0, \alpha) = 0, x_1 = \alpha\lambda_0 / \mu\tau(1 - \alpha)$. Отметим, что пары величин $x_1; Y_1$ для систем (2.1), (1.4) и (3.1) одинаковые. Если выбраны значения параметров (1.5), то граничное значение выпуска $Y_1 = 100$ обеспечивает условный максимум $\pi_{\max} = 5000$ плотности потока прибыли при условии $z = 0$ и $p = a - bY$ в точке покоя $M_1(x_1; Y_1; p_1; z_1)$ системы (3.1), где $x_1 = 1,5588 \cdot 10^6; Y_1 = 100, p_1 = 160; z_1 = 0$. В окрестности точки M_1 переход к самофинансированию – устойчивое движение, если прогнозируемая средняя величина спроса меньше скорректированного граничного значения выпуска $d < \gamma Y_1$. Распределение $z(t)$ кредита во времени можно рассматривать как управляющий параметр, ограниченный суммарной величиной кредита. В этом случае систему (3.1) записываем без последнего уравнения $\dot{z} = \varepsilon z(d - \gamma Y)$ и решаем оптимизационную задачу с двумя ограниченными управлениями $s(x, Y, p); z(x, Y, p)$.

В заключение следует отметить, что кроме максимума прибыли возможны другие критерии оптимальности: минимум полных издержек при равновесии спроса и предложения, минимум времени перехода к равновесию спроса и предложения в неравновесной модели, минимум внешних заимствований $Z(T)$, необходимых для достижения равновесия спроса и предложения при высоком уровне спроса. Могут быть использованы линейные комбинации названных критериев. Представляет интерес многокритериальная задача оптимального управления с указанными критериями.

Рассмотренные выше модели существенно нелинейные. Линеаризация может использоваться для формирования приближенных решений задач оптимального управления нелинейными системами (1.4), (2.2), (3.1). Одна из возможных квазиоптимальных стратегий состоит в минимизации времени достижения максимального значения плотности потока прибыли и стабилизации этого состояния за

счет надлежащего выбора управляющих воздействий. Если в устойчивом равновесном состоянии достигается максимум потока прибыли, то одна часть этого потока нейтрализует выбытие основных фондов, другая – выбытие «человеческого капитала». Относительная величина инвестиционных потоков принимает постоянное значение от момента достижения состояния равновесия до конца календарного периода. В приведенном примере указанное отношение $s/(1-s) = 1,5$. Для значений параметров равновесной модели (1.5) матрица линеаризованной системы имеет отрицательные собственные значения, поэтому квазиоптимальное управление релейное, число переключений не больше двух [5; 6; 10; 11].

Библиографический список.

1. Аганин, Ю. И. Устойчивость движения в динамической модели монополии / Ю. И. Аганин // Девятые Курдюмовские чтения: «Синергетика в общественных и естественных науках»: материалы международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. 17–21 апреля 2013 г. – Тверь, 2013. – С. 240–243.
2. Аганин, Ю. И. Кредит и цена в динамической модели дуополии / Ю. И. Аганин // Восьмые Курдюмовские чтения: «Синергетика в естественных науках»: материалы международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. 18–22 апреля 2012 г. – Тверь, 2012. – С. 201–204.
3. Аганин, Ю. И. Влияние фондовооруженности на устойчивость движения в динамической модели дуополии / Ю. И. Аганин // Вестник университета. – 2013. – № 16. – С. 120–126.
4. Антипов, Д. В. Оптимальное управление инвестициями. / Д. В. Антипов // Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов: сб. статей / Под ред. В. Н. Сидоренко. – М., 2002. – С. 47–61.
5. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М., 1968. – 764 с.
6. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения: учеб. пособие / Б. А. Лагоша, Т. Г. Апалькова. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 224 с.
7. Лебедев, В. В. Динамическая модель возникновения монопольного рынка новой продукции и его трансформации в дуополию / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев // Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов: сб. статей / Под ред. Ю. Н. Гаврильца. – М.: ЦЭМИ РАН, 2012. – Вып. 5. – С. 81–92.
8. Лебедев, В. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М.: Тест, 2011. – 336 с.
9. Лебедев, В. В. Математическое и компьютерное моделирование экономики / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М.: НВТ-Дизайн, 2002. – 256 с.
10. Тарасьев, А. М. Влияние параметров производственных функций на равновесное решение и функцию цены задачи оптимального управления / А. М. Тарасьев, А. А. Усова // МТИП. – 2011. – С. 85–115.
11. Янг, Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – М., 1974. – 488 с.
12. Fundamental methods of mathematical economics / Alpha C. Chiang. – 2d ed. – New York, 1974. – p. 784.
13. Lucas, R. E. On the Mechanics of Economic Development / R. E. Lucas // Journal of Monetary Economics, 1988. – Vol. 22. – № 1. – P. 3–42.
14. Shone, R. Economic Dynamics. Phase Diagrams and their Economic Applications / R. Shone. – 2d ed. – Cambridge University Press, 2002. – 708 p.