Тарасенко Анна Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, ФГБОУ ВО
«Самарский государственный
технический университет», г. Самара,
Российская Федерация
e-mail: Tarasenko.A.V@mail.ru

Егорова Ирина Петровна
канд. физ.-мат. наук, ФГБОУ ВО
«Самарский государственный
технический университет», г. Самара,
Российская Федерация
e-mail: ira.egorova81@yandex.ru

Tarasenko Anna
Candidate of Physical and Mathematical
Sciences, Samara State Technical
University, Samara, Russia
e-mail: Tarasenko.A.V@mail.ru

Egorova Irina
Candidate of Physical and Mathematical
Sciences, Samara State Technical
University, Samara, Russia
e-mail: ira.egorova81@yandex.ru

ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ БЕЛЛМАНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДСТВ МЕЖДУ ПРЕДПРИЯТИЯМИ НА РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА

Аннотация. Рассмотрен метод динамического программирования, применяющийся в решениях многих задач по экономике, на примере использования принципа оптимальности Беллмана для решения задач нелинейного программирования. На конкретном численном примере подробно показаны особенности решения со всеми вычислениями. Сформулирована задача оптимального распределения средств между предприятиями на расширение производства, которое давало бы максимальный общий прирост выпуска продукции. Приведено решение поставленной задачи для случая трех предприятий. Показано, что принцип оптимальности Беллмана позволяет решать прикладные задачи прогнозирования затрат с получением оптимального решения – максимальной прибыли при минимальных затратах.

Ключевые слова: динамическое программирование, экономические задачи, принцип оптимальности Беллмана, многошаговая задача, рекуррентное соотношение, максимизирующие значения.

Цитирование: Тарасенко А.В., Егорова И.П. Принцип оптимальности Беллмана в задаче оптимального распределения средств между предприятиями на расширение производства // Вестник университета. 2019. № 10. С. 132-138.

THE OPTIMAL PRINCIPLE OF BELLMAN IN THE PROBLEM OF OPTIMAL MEANS DISTRIBUTION BETWEEN ENTERPRISES FOR THE EXPANSION OF PRODUCTION

Abstract. The method of dynamic programming has been considered, which is used in solving multiple problems in economics, on the example of using Bellman's optimality principle for solving nonlinear programming problems. On a specific numerical example, the features of the solution have been shown in detail with all the calculations. The problem of optimal distribution of funds among enterprises for the expansion of production has been formulated, which would give the maximum total increase in output. The solution of the task has been presented in the case, when the number of enterprises is 3. It has been shown, that the Bellman optimality principle allows you solve applied problems of cost forecasting with obtaining the optimal solution-maximum profit at minimum costs.

Keywords: dynamic programming, economic problems, Bellman's optimality principle, multi-step problem, recurrence relation, maximizing values.

For citation: Tarasenko A.V., Egorova I.P. The optimal principle of Bellman in the problem of optimal means distribution between enterprises for the expansion of production (2019) Vestnik universiteta, I. 10, pp. 132-138. doi: 10.26425/1816-4277-2019-10-132-138

В различных областях человеческой жизнедеятельности часто оказывается полезным принимать решения не сразу, а постепенно, шаг за шагом. Таким образом, принятое решение рассматривается не как единичный процесс, а как процесс, который состоит из нескольких уровней. Такая схема уже довольно длительное время используется при решении некоторых частных вопросов. Одним из математических методов, который применяет данный подход, и который применяется при решении экономических задач, является динамическое программирование. Большой вклад в развитие теории динамического программирования внес американский математик Р. Беллман в 50-х гг. XX в. [2].

© Тарасенко А.В., Егорова И.П., 2019. Статья доступна по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0. всемирная (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

The Author(s), 2019. This is an open access article under the CC BY 4.0 license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Предметом динамического программирования является изучение многошаговых задач и их решений. В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности, который имеет широкую сферу приложений в реальных жизненных процессах.

Динамическое программирование связано с временным процессом, динамика заключается не в решаемых задачах, а в методе решения. Решение задачи разбивается на шаги, которые последовательно решаются, приводя в итоге к искомому решению [4]. При этом решения на каждом шаге принимаются, исходя из интересов всего процесса в целом, а не каждого шага в отдельности. Процессы принятия решений, которые базируются на таком принципе, принято называть многошаговыми.

Метод динамического программирования состоит из 2-х этапов:

- получение основного рекуррентного соотношения;
- фактическое решение, причем практически во всех случаях состоит в численном решении основного рекуррентного соотношения.

Динамическое программирование применяют в различных областях экономики, и в настоящее время данный метод рассматривается многими исследователями. Широкий класс экономических задач составляют такие задачи, в которых идет речь о наиболее целесообразном распределении во времени каких-либо ресурсов, например, денежных средств, рабочей силы, сырья, топлива и т. п. [1; 3; 5]. При решении задач по динамическому программированию используют так называемый принцип оптимальности, который впервые был сформулирован для решения задач на экстремум Р. Беллманом.

Оптимальная последовательность решений обладает тем свойством, что независимо от первоначального состояния и решения, принятого в первый момент, последующие решения должны быть оптимальными относительно состояния, получающегося из исходного в результате первого решения.

Геометрической интерпретацией этого принципа может служить кривая AB быстрейшего спуска из A в B материальной точки (брахистохрона). Для любой промежуточной точки C участок пути CB на брахистохроне должен минимизировать время движения материальной точки из C в B при заданной в точке C начальной скорости (независимо от способа попадания материальной точки в точку C).

Рассмотрим следующий методический пример, применим принцип оптимальности Беллмана для решения задачи нелинейного программирования. Требуется определить неотрицательные значения переменных, $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих неравенству:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b, a_i > 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (1)$$

(где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – постоянные коэффициенты, n – натуральное число), для которых целевая функция

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad (2)$$

принимает наибольшее значение.

Целевой функцией называется вещественная или целочисленная функция нескольких переменных, которая подлежит оптимизации (максимизации или минимизации) в целях решения некоторой оптимизационной задачи. В (1) и (2) постоянные a_i, b и функции $f_i(x_i)$ известны, и предполагается, что задача (1), (2) имеет единственное решение.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, удовлетворяющих неравенству:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k \leq \delta, \quad (3)$$

для которых целевая функция:

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_k(x_k) \quad (4)$$

принимает наибольшее значение.

Эту задачу, назовем k -шаговой подзадачей, а величину δ – параметром состояния. При $k = n$ и $\delta = b$ получаем исходную задачу (1), (2).

Обозначим максимальное значение целевой функции в k -шаговой подзадаче через

$$R_k(\delta) = \max_{\sum_{i=1}^k a_i x_i \leq \delta} \sum_{i=1}^k f_i(x_i). \quad (5)$$

Если в задаче (3), (4) временно зафиксировать переменную x_k , то остальные переменные $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$, как это непосредственно следует из (3), должны удовлетворять неравенству:

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \leq \delta - a_k x_k.$$

Поэтому при фиксированном значении переменной x_k для максимума целевой функции (4) имеем:

$$\max_{\sum_{i=1}^k a_i x_i \leq \delta} \sum_{i=1}^k f_i(x_i) = f_k(x_k) + \max_{\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \leq \delta - a_k x_k} \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i) = f_k(x_k) + R_{k-1}(\delta - a_k x_k), \quad (6)$$

где $R_{k-1}(\delta - a_k x_k)$ – максимальное значение целевой функции $(k-1)$ -шаговой подзадачи с параметром состояния $\delta - a_k x_k$, отличным от параметра состояния δ k -шаговой подзадачи.

Если функция $R_{k-1}(\delta - a_k x_k)$ найдена или хотя бы определена для любого допустимого значения $x_k \cdot (0 \leq x_k \leq \delta/a_k)$, то, переходя в (6) к максимуму по x_k , получаем:

$$R_k(\delta) = \max_{0 \leq x_k \leq \delta/a_k} [f_k(x_k) + R_{k-1}(\delta - a_k x_k)]. \quad (7)$$

Так как форма данной задачи (1), (2) инварианта относительно n , то равенство (6) можно рассматривать как рекуррентное соотношение для определения функции $R_{k-1}(\delta)$, $k = 2, 3, \dots, n$. При этом начальное условие $R_1(\delta)$ определяется из равенства (5):

$$R_1(\delta) = \max_{0 \leq x_1 \leq \delta/a_1} f_1(x_1),$$

а искомый максимум при $R_n(\delta)$.

Инвариант (или инвариантность) – свойство некоторого класса (множества) математических объектов, остающееся неизменным при преобразованиях определенного типа.

Рекуррентным соотношением или рекуррентной формулой называется такая формула, которая позволяет вычислить каждый член последовательности, если заданы ее первые k члены. Рекуррентное соотношение (7) можно также получить непосредственно из принципа оптимальности, согласно которому целевая функция k -шаговой подзадачи с параметром состояния δ для данного x_k равна вкладу $f_k(x_k)$ от k -го шага плюс оптимальный вклад $R_{k-1}(\delta - a_k x_k)$ от $(k-1)$ -шаговой подзадачи.

Максимизирующим значением (или аргументом максимизации) называется величина аргумента, при которой рассматриваемое выражение достигает максимума. (Аналогично вводится понятие аргумента минимизации – величина, при которой данное выражение достигает минимума).

Допустимое значение переменной $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\delta)$, $0 \leq x_k \leq \delta/a_k$ максимизирующее функцию $f_k(x_k) + R_{k-1}(\delta - a_k x_k)$, явно зависит от δ , то есть $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\delta)$. После того, как при помощи рекуррентного соотношения (7) найдены $R_n(\delta)$ и функции, $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\delta)$, $k = 1, 2, \dots, n$, искомые максимизирующие значения $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ определяются следующим образом: прежде всего, очевидно, что $x_n^* = \bar{x}_n(b)$. Далее, так как оставшиеся переменные $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b - a_n x_n^*,$$

то:

$$R_{n-1}(b - a_n x_n^*) = \max_{\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \leq b - a_n x_n^*} \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i).$$

Поэтому имеем:

$$x_{n-1}^* = \bar{x}_{n-1}(b - a_n x_n^*).$$

Аналогично получаем:

$$x_{n-2}^* = \bar{x}_{n-2}(b - a_n x_n^* - a_{n-1} x_{n-1}^*).$$

и т. д.

Рекуррентное соотношение (7) позволяет сравнительно просто определить оптимальное значение $R_k(\delta)$ целевой функции k -шаговой подзадачи, если уже найдено для всех значений μ из некоторого множества оптимальное значение $R_{k-1}(\mu)$ целевой функции $(k-1)$ -шаговой подзадачи. При этом автоматически находится условное оптимальное управление $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\delta)$. На последнем (во времени) шаге получаем искомые оптимальные значения $R_n(\delta)$ и $\bar{x}_k^* = \bar{x}_k(\delta)$, где b – параметр состояния исходной задачи. Остальные оптимальные значения $x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, \dots, x_1^*$ находятся обратной подстановкой.

Одна из замечательных особенностей метода динамического программирования состоит в том, что при использовании этого метода, наряду с решением данной задачи, автоматически получают решения целого семейства сходных задач (для значений параметров состояния, меньших b , и размерностей задачи, меньших n).

Метод динамического программирования сводит решение данной задачи на экстремум, рассматриваемой как n -шаговая задача, к последовательному решению вспомогательных, обычно одномерных задач на экстремум.

Как правило, метод динамического программирования применяется для решения задач на отыскание экстремумов, в которых целевая функция, а также функции, входящие в ограничения, являются аддитивными.

Функции n переменных, представляемых в виде суммы n функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, называются аддитивными.

Теперь мы разберем конкретный пример. В данной статье мы подробно рассмотрим задачу оптимального распределения средств на расширение производства следующего содержания: салон красоты Perfect Image ИП С. В. Скворцовой в г. Самара оказывает три вида услуг ($i=1, 2, 3$):

- услуги эпиляции;
- маникюр и педикюр;
- наращивание ресниц и окраска бровей.

На каждый вид услуг требуется свой расходный материал, который необходимо закупать, а также каждый вид услуг приносить свой доход. Каждому виду услуг выделяют дополнительные средства (закупка материалов, реклама, аренда новых помещений и т. д.) на расширение производства для получения максимальной прибыли в зависимости от вида услуг.

Через x_i обозначим количество средств, которые выделяются каждому из видов услуг. По каждой услуге указан возможный прирост прибыли $f_i(x)$ в зависимости от выделенной суммы x_i . Требуется так распределить между этими услугами салона красоты средства $C = 210$ тыс. денежных единиц, чтобы общая прибыль была максимальной.

Переформулируем вопрос поставленной задачи: другими словами, нам требуется построить план распределения денежных средств, максимизирующий общую прибыль.

Значение $f_i(x)$ прибыли от оказанных услуг в зависимости от выделенной суммы x_i (без учета затрат на оплату коммунальных услуг, аренды помещения, налоговых выплат и денежных средств на закупку нового расходного материала) приведены в таблице 1.

Данные в таблице в столбцах $f_i(x)$ имеет нелинейную зависимость сходя из спроса на виды услуг в каждый сезон, например, в предпраздничные дни, такие как Новый год, 8 Марта, выпускные, сезон свадеб и сезон отпусков, спрос на данные виды услуг увеличивается, соответственно возрастает прибыль, и, наоборот, в период «затишья» (после праздников) спрос падает, соответственно уменьшается прибыль.

Прирост прибыли в зависимости от выделенных средств

Средства, тыс. ден. ед.	Виды услуг		
	№ 1	№ 2	№ 3
	Прирост прибыли $f_i(x)$, тыс. ден. ед.		
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
35	30	19	20
70	42	37	63
105	85	90	82
140	112	119	121
175	162	128	140
210	182	179	181

Составлено авторами по материалам исследования

Решение.

Основываясь на принципе оптимальности Беллмана, основное рекуррентное соотношение для поставленной задачи имеет вид

$$R_k(\delta) = \max_{x_k} [f_k(x_k) + R_{k-1}(\delta - x_k)], \quad k = 2, 3, \quad (8)$$

где максимум берется по всем x_k , равным 0, ..., δ [2; 4].

Причем при $k=1$

$$R_1(\delta) = \max f_1(x_1) = f_1(\delta), \quad \bar{x}_1 = \delta, \quad \bar{x}_1 = \delta, \quad (9)$$

где δ – параметр состояния k -шаговой подзадачи; x_k – переменная, условное оптимальное значение которой; $\bar{x}_k = \bar{x}_k(\delta)$ определяется на k -м шаге.

При $k=1$ все средства вкладываются в одно предприятие. Используя данные из таблицы 1 и применяя формулу (9), результаты запишем в таблицу 2.

Таблица 2

Оптимальные значения целевой функции при вложении в одно предприятие

$\delta = x_1$	$R_1(\delta)$	$\bar{x}_1$
0	0	0
35	30	35
70	42	70
105	85	105
140	112	140
175	162	175
210	182	210

Составлено авторами по материалам исследования

При $k=2$ все средства вкладываются в два предприятия. Тогда из (8) рекуррентное соотношение имеет вид

$$R_2(\delta) = \max_{x_2=0, \dots, \delta} [f_2(x_2) + R_1(\delta - x_2)]. \quad (10)$$

При $k=3$ все средства вкладываются в три предприятия. Из (8) рекуррентное соотношение в данном случае примет следующий вид

$$R_3(\delta) = \max_{x_3=0,\dots,\delta} [f_3(x_3) + R_2(\delta - x_3)] . \quad (11)$$

Используя данные из таблиц 1, 2, и применяя формулы (10), (11), результаты вычислений запишем в таблицу 3.

Таблица 3

Оптимальные значения целевых функций при вложении в два и в три предприятия

δ	$x_p, i=2, 3$	$\delta - x_p, i=2,3$	$f_2(x_2)=R_1(\delta-x_2)$	$R_2(\delta)$	$\bar{x}_2$	$f_3(x_3)=R_2(\delta-x_3)$	$R_3(\delta)$	$\bar{x}_3$
35	0	35	30	30	0	30	30	0
	35	0	19			20		
70	0	70	42	49	35	49	63	70
	35	35	49			50		
	70	0	37			63		
105	0	105	85	90	105	90	93	70
	35	70	61			69		
	70	35	67			93		
	105	0	90			82		
140	0	140	112	120	105	120	121	140
	35	105	104			110		
	70	70	79			112		
	105	35	120			112		
	140	0	119			121		
175	0	175	162	162	0	162	162	0
	35	140	131			140		
	70	105	122			153		
	105	70	132			131		
	140	35	149			151		
	175	0	128			140		
210	0	210	182	182	0	182	183	70
	35	175	181			182		
	70	140	149			183		
	105	105	175			172		
	140	70	161			170		
	175	35	158			170		
	210	0	179			181		

Составлено авторами по материалам исследования

Применяя формулы [2; 4]:

$$x_{n-1}^* = \bar{x}_{n-1}(C - x_n^*),$$

определим искомые максимизирующие значения, x_1^*, x_2^*, x_3^* (ассигнования трем предприятиям) определяют следующим образом (по условию $C=210$ тыс. ден. ед.):

1. Из таблицы 3 следует: $x_3^* = \bar{x}_3(C - x_4^*) = \bar{x}_3(210 - 0) = \bar{x}_3(210) = 70$;
2. Из таблицы 3 следует: $x_2^* = \bar{x}_2(C - x_3^*) = \bar{x}_2(210 - 70) = \bar{x}_2(140) = 105$;
3. Из таблицы 3 следует: $x_1^* = \bar{x}_1(C - x_3^* - x_2^*) = \bar{x}_1(210 - 70 - 105) = \bar{x}_1(35) = 35$.

Основываясь на результатах вычислений, можно сделать следующий вывод: из последней таблицы следует, что максимальная прибыль составляет 183 тыс. ден. ед. ($R_3(210) = 183$), если выполнено распределение денежных средств по всем трем видам услуг, при котором на услугу № 3 «наращивание ресниц и окраска бровей» должно быть выделено 70 тыс. ден. ед. ($x_3^* = 70$), на услугу № 2 «маникюр и педикюр» – 105 тыс. ден. ед. ($x_2^* = 105$), услуге № 1 «услуги эпиляции» – 35 тыс. ден. ед. ($x_1^* = 35$).

Основываясь на рассмотренном примере, можно сделать вывод, что принцип оптимальности Беллмана позволяет решать задачи, возникающие в реальной жизни для прогнозирования затрат так, чтобы получить оптимальное решение (максимальную прибыль) при минимальных затратах.

Библиографический список

1. Афанасьев, М. Ю. Суворов, Б. П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с.
2. Беллман, Р. Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 401 с.
3. Кремер, Н. Ш., Путко, Б. А., Тришин, И. М., Фридман, М. Н. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
4. Лежнев, А. В. Динамическое программирование в экономических задачах: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 176 с.
5. Токарев, В. В. Модели и решения: Исследование операций для экономистов, политологов и менеджеров – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.

References

1. Afanas'ev M. Yu., Suvorov B. P. Issledovanie operatsii v ekonomike: modeli, zadachi, resheniya [*Operations research in Economics: models, tasks, solutions*], Moscow, INFRA-M, 2003, 444 p.
2. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovaniye [*Dynamic programming*], Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1960, 401 p.
3. Kremer N. Sh., Putko B. A., Trishin I. M., Fridman M. N. Issledovanie operatsii v ekonomike: Ucheb. posobie dlya vuzov [*Operations research in Economics: textbook for universities*], Moscow, YuNITI, 2002, 407 p.
4. Lezhnev A. V. Dinamicheskoe programmirovaniye v ekonomicheskikh zadachakh: uchebnoye posobie [*Dynamic programming in economic problems: textbook*], Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy, 2010, 176 p.
5. Tokarev V. V. Modeli i resheniya: Issledovanie operatsii dlya ekonomistov, politologov i menedzherov [*Models and solutions: operations Research for economists, political scientists and managers*], Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 p.