
ЭКОНОМИКА: ПРОБЛЕМЫ, РЕШЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

УДК 51-74

Т.М. Гатауллин

В.И. Малыхин

Л.Л. Гончаров

А.О. Меренков

МАКСКОНЦЕВЫЕ И МИНИКОНЦЕВЫЕ ФУНКЦИИ

Аннотация. Авторами рассмотрен актуальный для прикладной математики на сегодняшний день вопрос экстремизации максконцевых и миниконцевых функций, впервые введенных Т.М. Гатауллиным в 2002 г.; рассмотрены некоторые новые свойства концевых функций.

Ключевые слова: концевая функция, экстремум, инфимум, монотонность функции, выпуклость функции, линейное программирование

Timur Gataullin

Vjacheslav Malyhin

Leongard Goncharov

Artem Merenkov

MAXITRAILER AND MINITRAILER FUNCTIONS

Annotation. Authors have considered an extremization question actual for applied mathematics today the maxitrailer and the minitrailer functions introduced by T.M. Gataullin in 2002 for the first time; some new properties of trailer functions are considered.

Keywords: trailer function, extremum, infimum, monotony of function, camber of function, linear programming

Прикладная математика разрабатывает и исследует методы и модели явлений и процессов в экономике, фактически применяет методы, разработанные фундаментальной математикой для исследования явлений и процессов реального мира. Совокупность конкретных методов и моделей, разработанных прикладной математикой, образует исследование операций, которое все чаще в последнее время называют математическим моделированием (далее ММ), которое помогает решать большой спектр экономических задач. В методах и моделях ММ одним из основных разделов является раздел экстремизации различных функций, так как одной из основных целей исследования операций является как раз нахождение экстремальных значений параметров исследуемых моделей, при которых достигается экстремум тех или иных показателей, интересующих исследователя.

Понятие концевой функции было введено Т.М. Гатауллиным в 2002 г. в работе [1] и развито позднее в работе [3]. Это понятие появилось по сугубо практической надобности – необходимости решить экстремальную задачу транспортной направленности [2]. Тогда же стало ясно, что данное понятие может быть существенно полезно в экономике.

Предварительно дадим определение выпуклого множества. Пусть точки $x, y \in L$.

Отрезком $[x, y]$ в L называется множество $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$

1. **Определение концевых функций.** Назовем функцию максконцевой, если ее область определения есть выпуклое множество и ее максимальное значение на любом отрезке области определения достигается в одной из концевых точек этого отрезка. Аналогично определяется миниконцевая функция – это такая функция, область определения которой есть выпуклое множество, и ее максимальное значение на любом отрезке из области определения достигается в одной из концевых точек отрезка. Концевой называется либо максконцевая, либо миниконцевая функция.

Начнем с задачи, которая некоторое время была нерешенной и этим вызывала определенный

интерес (Теорема 1). Полное решение этой задачи не получено. Приводим некоторые частичные результаты в этом направлении. Окончательное решение этой проблемы оставляем на дальнейшее [5].

Теорема 1. Любой многочлен степени не меньше 3 не является концевой функцией.

Всюду в дальнейшем область определения функции – это обычно подмножество некоторого конечного арифметического линейного пространства, т.е. некоторого R^n (нет необходимости в более общих линейных пространствах – так как рассматриваются только конечномерные пространства и их подмножества). Отрезок в таком множестве – это множество $[x, y] = \{ \lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$ для каких-нибудь двух точек x, y из указанного множества. На этом отрезке задано естественное линейное упорядочение.

2. **Концевые функции и угловые точки.** Напомним, что точка некоторого подмножества линейного пространства называется угловой точкой (этого подмножества), если она не является внутренней точкой никакого отрезка, лежащего в этом множестве. Основное свойство концевых функций выражено в следующем предложении. (Для миниконцевых функций соответствующие формулировки опускаются).

Предложение 1. Пусть f – максконцевая функция, определенная на компактном выпуклом множестве, тогда для любой точки z найдется угловая точка x этого множества, такая что $f(z) \leq f(x)$.

Из предложения 1 вытекают три следствия.

Следствие 1. Если максимум максконцевой функции на компактном выпуклом множестве достигается, то он достигается в некоторой угловой точке. [6]

Следствие 2. Если множество угловых точек компактного выпуклого множества конечно, то максконцевая функция на этом множестве достигает максимума (очевидно, в некоторой угловой точке). [4]

Следствие 3. Если максконцевая функция не ограничена на компактном выпуклом подмножестве некоторого R^n , то она не ограничена на множестве его угловых точек. Напомним еще раз, что все множества определения функций предполагаются подмножествами некоторого R^n . Доказательство предложения 1. Теорема Крейна-Мильмана [10] гласит, что компактное выпуклое подмножество $K \subseteq R^n$ есть выпуклая оболочка множества его угловых точек. Пусть z – произвольная точка множества K , тогда $z = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ для некоторых угловых точек $x_1, \dots, x_n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, \sum_i \lambda_i = 1$. Итак, $z = (\lambda_1 x_1) + \dots + (\lambda_n x_n)$, следовательно, z есть (внутренняя) точка отрезка $[x, y]$, где $y = (\lambda_n / (1 - \lambda_n)) x_n$. Так как f максконцевая функция, то f достигает максимума в точке x , или в точке y . Если имеет место 1-й случай, то доказательство окончено – ведь x – угловая точка и $f(z) \leq f(x)$. Если 2-й случай, то точка y есть линейная комбинация угловых точек в количестве на одну меньше и опять-таки $f(z) \leq f(y)$. Далее действуем по индукции.

Предложение 2. Пусть K – какое-нибудь компактное выпуклое подмножество и G – множество его угловых точек. Пусть f на G положительно, а в остальных точках множества K равно 0, тогда f – максконцевая функция.

Обозначим множество угловых точек Ψ . Только что было определено отображение $A: K \rightarrow \Psi$.

Теорема Шаудера. Если оператор A отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество банахова пространства в себя, то существует по крайней мере одна точка $x \in K$ такая, что $Ax = x$. Доказана Ю. Шаудером как обобщение теоремы Брауара о неподвижной точке. Существуют различ-

ные обобщения этой теоремы Шаудэра: теорема Маркова-Какутани, принцип Тихонова и т.п. Мы оставляем исследование применимости этой теоремы для концевых функций на будущее. Сейчас же приведем только некоторые следствия этой теоремы: **Следствие 1.** Неподвижная точка, о которой говорит теорема Шаудэра, является угловой. **Следствие 2.** Множество неподвижных точек выпукло.

Доказательство непосредственно.

Предложение 2. Пусть G - граница K . Пусть функция f равна 0 на G и больше 0 на $K \setminus G$. Тогда f - максонцевая.

Доказательство. Пусть I – отрезок из K . Если он лежит в $K \setminus G$, то f принимает максимум в одном из концов, поскольку на I функция равна 0. Если один из концов лежит в G , то, тем более, максимум f принимает в одном из концов. Итак, f – максонцевая функция.

Предложение 2 показывает, что концевые функции могут быть очень далекими от непрерывных, линейных и т.п. хорошо известных функций.

Характеристика концевых функций одной переменной. Для максонцевых функций одной переменной следствие 1 верно и без оговорки о достижении максимума, так как компактное выпуклое подмножество R есть отрезок. Среди функций одной переменной монотонные функции являются концевыми в обоих смыслах. Следующее предложение 3 характеризует максонцевые функции одной переменной. Предложение приводится без доказательства [7].

Предложение 3. Функция одной переменной является концевой если и только если ее область определения есть объединение двух промежутков монотонности: максонцевая функция на левом промежутке убывает, на правом возрастает, для миниконцевой – наоборот. Доказательство. Напомним, что область определения концевой функции есть выпуклое подмножество действительной прямой, т.е. некоторый промежуток – конечный или бесконечный. Докажем, что максонцевая функция f характеризуется указанным образом (для миниконцевой доказательство аналогично). Предположим сначала, что минимум f достигается в какой-то точке с области определения. Пусть $x < y \leq c$, тогда максимум функции f на отрезке $[x, c]$ достигается в точке x , так что $f(x) \geq f(y)$, т.е. левее точки c функция f убывает. Аналогично, пусть $c \leq x < y$, тогда максимум функции f на отрезке $[c, y]$ достигается в точке y , так что $f(x) \leq f(y)$, т.е. правее точки c функция f возрастает. Рассмотрим теперь случай, когда минимум f не достигается. Сначала пусть $\inf f = g$. Существует последовательность $\{x\}$, на которой этот инфимум реализуется. Возможны два случая: существует ограниченная подпоследовательность, на которой реализуется инфимум и второй случай, когда такой подпоследовательности нет. В обоих случаях можно считать, что сама последовательность $\{x\}$ такова. В первом случае, пусть $c = \lim \{x\}$ и на рассматриваемой последовательности функция убывает. Ясно, что $f(c) > g$. Предположим, что вся последовательность $\{x\}$ лежит слева от c . Пусть $z < y < c$. Найдется x , такой что $y < x$ и $f(x) < f(y)$, тогда максимум f на отрезке $[z, x]$ достигается в точке z , следовательно, $f(z) \geq f(y)$, так что левее точки c функция f убывает. Пусть $c < z < y$. Найдется x , такое, что $f(x) < f(c)$, тогда максимум f на отрезке $[x, y]$ достигается в точке y , следовательно, $f(z) \geq f(y)$, так что правее точки c функция f возрастает. Предположим теперь, что вся последовательность $\{x\}$ лежит справа от c . Пусть $c < y < z$. Найдется x , такой что $x < y$ и $f(x) < f(y)$, тогда максимум f на отрезке $[z, x]$ достигается в точке z , следовательно, $f(z) \geq f(y)$, так что правее точки c функция f возрастает. Пусть $z < y < c$. Найдется x , такое, что $f(x) < f(y)$, тогда максимум f на отрезке $[z, x]$ достигается в точке z , следовательно, $f(z) \geq f(y)$, так что левее точки c функция f убывает. Рассмотрим теперь второй случай: когда инфимум реализуется на бесконечности. Пусть предел последовательности $\{x\}$ есть z . Пусть $z < y$. Найдется x , такой, что $x > y$ и $f(y) > f(x)$. Тогда на отрезке $[z, x]$ максимум f может быть только в z , так что $f(z) \geq f(y)$, так что f убывает на всей области определения. Если же предел последовательности $\{x_n\}$ есть z , то доказывается, что f возрастает на всей области определения.

Предложение 4. Среди функций одной переменной только монотонные функции являются одновременно и максконцевой и миниконцевыми. Доказательство. Ранее уже указывалось, что монотонная функция является и максконцевой и миниконцевой. Таким образом, осталось доказать только, что функция одной переменной, являющаяся и максконцевой и миниконцевой, является монотонной. Рассмотрим такую функцию f . Если f есть константа, то доказывать нечего, так что пусть найдутся точки $a < b$, такие что $f(a) \neq f(b)$, пусть, например, $f(a) < f(b)$. Пусть $b < c$, тогда $f(b) \leq f(c)$, так как f максконцевая, пусть $c < d$, тогда по той же причине $f(c) \leq f(d)$, следовательно, правее точки b функция f возрастает. Так как f миниконцевая, то левее точки a функция f убывает. Пусть теперь $a < p < q < b$. Так как $f(a) < f(b)$ и f – максконцевая, то $f(q) \leq f(b)$, по той же причине $f(p) \leq f(q)$, а так как она миниконцевая, то $f(a) \leq f(p)$. Доказано, что f – возрастающая функция.

4. Концевые функции многих переменных. Следующее предложение 5 дает важные примеры концевых функций многих переменных. Напомним, что функция f называется выпуклой, если ее область определения есть выпуклое подмножество (какого-то линейного пространства) и $f(x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ для любых x, y из области определения и любого $\lambda \in [0, 1]$ [8].

Предложение 5. Выпуклая функция является максконцевой.

Доказательство. Пусть функция f выпукла и отрезок $[x, y]$ лежит в области определения. Тогда $f(x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \max\{f(x), f(y)\} = g$, где g – максимальное из чисел $f(x), f(y)$. Доказано, что f – максконцевая функция. Сформулируем предложение 5 более подходящим для наших нужд образом.

Предложение 5'. Вогнутая функция является миниконцевой.

Предложение 5''. Миниконцевая функция не является максконцевой – даже если она вогнутая всего лишь на небольшом отрезке.

Следствие 4. Линейная функция является и максконцевой и миниконцевой.

Предложение 6'. Выпуклая функция является максконцевой.

Максконцевая функция не является миниконцевой – даже если она выпуклая всего лишь на небольшом отрезке.

Предложение 6''. Выпуклая функция является максконцевой.

Миниконцевая функция не является максконцевой – даже если она выпуклая всего лишь на небольшом отрезке.

Замечание. Однако выпуклые функции не покрывают весь объем класса максконцевых функций, даже для функций одной переменной. Так, на рис. 1 представлен график максконцевой функции (по предложению 4), не являющейся, очевидно, выпуклой. Это замечание вместе с предложением 5 позволяет привести простые примеры максконцевых, не миниконцевых функций; например, таковой будет выпуклая функция, не являющаяся возрастающей, скажем, квадратичная с положительным старшим коэффициентом.



Рис. 1. График максконцевой функции

Некоторые предложения – составные части теоремы 1.

1. Пусть функция f имеет интервал выпуклости и интервал вогнутости, тогда она не конечная.

2. Если 2-я производная f'' функции f имеет нуль, разделяющий интервалы выпуклости и вогнутости, то f - не конечная.

3. Если 2-я производная функции f нуля не имеет, то f - максонцевая, если $f'' > 0$, ибо она выпуклая и f - миниконцевая, если $f'' < 0$ – это известно из курса классического математического анализа (см. [9, с. 104]).

4. Функции x^3, x^4 – максонцевые.

Следствие из 4. Предложение 3. Пусть $u(x, \dots, x), i=1, \dots, m$ – линейные функции, а $f(u, \dots, u)$ – конечная функция переменных $u, \dots, u$, тогда суперпозиция этих функций, т.е. функция $F(x, \dots, x) = f(u(x, \dots, x), \dots, u(x, \dots, x))$ есть конечная функция переменных $x, \dots, x$ (того же типа, т.е. максонцевая или миниконцевая смотря по тому какова f).

Доказательство. Перейдем к векторным обозначениям, пусть тогда X – вектор из области определения $D(U)$ вектор-функции $U(X)$, так что надо доказать, что функция $F(X) = f(U(X))$ есть конечная. Пусть $I = \{A + (1-\lambda)B\}$ – отрезок в $D(U)$, тогда вектор-функцией U он переводится в отрезок $U(I) = \{U(A) + (1-\lambda)U(B)\}$, причем концы отрезка I , очевидно переходят в концы отрезка $U(I)$ (если $U(A) = U(B)$, то отрезок $U(I)$ вырождается в точку) и, следовательно, на отрезке I нужный экстремум достигается в одном из концов, что и требовалось доказать.

Концевые функции представляют значительное обобщение многих «хороших» функций. В задачах линейного программирования (далее ЛП) целевая функция может считаться всего лишь конечной. Действительно, первая основная теорема ЛП остается верной при такой замене. В самом деле, эта теорема гласит, что задача ЛП имеет оптимальное решение, если допустимое множество не пусто (необходимое условие) и целевая функция задачи ограничена на допустимом множестве в направлении экстремума. Но, как известно, в задаче ЛП угловых точек в допустимом множестве конечное число, следовательно, целевая (любая!) функция ограничена на множестве G угловых точек. Таким образом, можно сформулировать следующее.

Предложение 7. Пусть дана задача максимизации максонцевой функции на компактном выпуклом подмножестве. Тогда эта задача имеет (оптимальное) решение если и только если целевая функция ограничена сверху на этом подмножестве. С учетом аналогичного предложения о миниконцевых функциях получаем следующее предложение, являющееся аналогом Первой основной теоремы ЛП.

Предложение 8. Пусть дана задача экстремизации конечной функции на компактном выпуклом подмножестве (т.е. максимизации максонцевой функции или минимизации миниконцевой). Тогда эта задача имеет (оптимальное) решение если и только если целевая функция ограничена на этом подмножестве в направлении экстремума. Вторая основная теорема ЛП утверждает, что если в задаче ЛП экстремум целевой функции достигается, то он достигается в некоторой угловой точке, так что следствие 1 есть аналог этой теоремы.

Однако конструктивных алгоритмов по нахождению экстремумов конечных функций, наподобие знаменитого симплекс-метода, может и не оказаться.

Предложение 9. Концевые и элементарные функции. Как известно, к элементарным относят:

1. Функция $y = ax^n$;
2. Показательную $y = ae^x$;
3. Логарифмическую $y = \log_a x$;
- 4.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$; $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; всевозможные суперпозиции этих функций.

Теорема 2. Функции 1) и 2) являются выпуклыми вниз и потому они максимизируемые;

Функция выпуклая вверх и потому она минимизируемая; 5. тригонометрические функции содержат интервалы выпуклости вверх и вниз и потому они не конечные.

Опираясь на свойства конечных функций, можно найти решения не только теоретических вопросов, но и найти большое практическое применение – например, в экономике. Так, могут быть получены решения задач по стратегическому управлению компаниями в условиях современного рынка, оптимизации кадровых ресурсов, планирования экономической деятельности предприятия на длительный срок [7].

Библиографический список

1. Гатауллин, Т. М. Концевые функции / Т. М. Гатауллин // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 116–118.
2. Гатауллин, Т. М. Использование на транспорте экстремизации с кусочно-линейными ограничениями в условиях рынка / Т. М. Гатауллин. – М. : АЭР, 2003. – С. 23.
3. Гатауллин, Т. М. Математическое моделирование в задачах экономики и управления на транспорте / Т. М. Гатауллин. – М. : ИКФ «Каталог», 2003. – С. 50–51.
4. Гатауллин, Т. М. Математическое моделирование в задачах экономики и управления на транспорте: дис. д-ра экон. наук: 08.00.13, 08.00.05 / Т. М. Гатауллин. – М., 2003. – 228 с.
5. Гатауллин, Т. М. Новый метод оптимизации для решения транспортных задач с кусочно-линейными ограничениями / Т. М. Гатауллин // Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы управления- 2002». – Вып. 3. – М. : ГУУ, 2002. – С. 35–38.
6. Гатауллин, Т. М. Экономико-математические аспекты стратегического управления на транспорте в условиях рынка / Т. М. Гатауллин. – М. : ИПР РАН, 2003. – С. 70.
7. Гатауллин, Т. М. Экономико-математическое моделирование на транспорте в условиях рынка. Монография / Т. М. Гатауллин. – М. : ИПР РАН, 2002. – С. 124–140.
8. Колемаев, В. А. Математические методы и модели исследования операций / В. А. Колемаев, Т. М. Гатауллин, В. И. Соловьёв [и др.]. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – С. 592. – ISBN 978-5-238-01325-1.
9. Малыхин В. И. Математика в экономике. Учебное пособие / В. И. Малыхин. – М, Инфра-М, 2000. – 356 с. – ISBN 5-86225-867-1. – С. 324–325.
10. Рудин У. Функциональный анализ / Пер. с англ. В. Я. Лина. Под ред. Е. А. Горина. – М. : Мир, 1975. – 444 с.