УДК 330.4, 51-77, 519.8 JEL C39, R19, R59 DOI 10.26425/1816-4277-2022-8-104-110

Моделирование динамики двухфакторных социально-экономических состояний посредством отображений, близких к растяжению

Егоров Владислав Валерьевич

Канд. физ.-матем. наук, доц. каф. математических методов в экономике и управлении
ORCID: 0000-0003-4735-989X, e-mail: yegoroff_vv@mail.ru

Государственный университет управления, г. Москва, Россия

Аннотация

Приводится новый способ разработки математической модели динамики факторов, формирующих рассматриваемое социальное, политическое, экономическое экологическое или иное пространство жизнедеятельности общества, в зависимости от локальных изменений параметров, влияющих на эти факторы. Особенностью предлагаемого подхода является использование матрицы включенных в изучение маржинальных величин, составляющих матрицу Якоби отмеченных факторов. В явном виде получена зависимость факторов, описывающих социально-экономическую систему, от параметров модели. При определенных условиях описываемые зависимости оказываются имеющими вид отображений, близких к растяжениям. Предложена генерализованная оценка указанных трансформаций, учет которой важен для предупреждения кризисных явлений. Модель предназначена к использованию в информационных, прогнозных и управленческих целях при наличии достаточной степени цифровизации общественных структур, без которой проблематичны получение и передача данных для построения модели и выполнение связанных с ней расчетов.

Ключевые слова

Общество, экономика, менеджмент, государственное управление, кризисы, социально-экономическое моделирование, прогнозирование, дифференциальные уравнения, частные производные, линеаризация

Для цитирования: Егоров В.В. Моделирование динамики двухфакторных социально-экономических состояний посредством отображений, близких к растяжению//Вестник университета. № 8. С. 104–110.

Modeling the dynamics of two-factor socio-economic states through mappings close to extension

Vladislav V. Egorov

Cand. Sci. (Phys. and Math.), Assoc. Prof. at the Mathematical Methods in Economics and Management Department
ORCID: 0000-0003-4735-989X, e-mail: yegoroff_vv@mail.ru

State University of Management, Moscow, Russia

Abstract

A new way of developing a mathematical model of the dynamics of the factors forming the considered social, political, economic, ecological or other space of life activity of society, depending on local changes in parameters affecting these factors, is presented. A feature of the proposed approach is the use of a matrix of marginal values included in the study that make up the Jacobi matrix of noted factors. The dependence of the factors describing the socio-economic system on the parameters of the model is obtained in explicit form. Under certain conditions, the described relations have the form of mappings close to extension. A generalized assessment of these transformations is proposed. Accounting for this assessment is important for preventing crisis phenomena. The model is intended to be used for informational, forecasting, management and governance purposes in the presence of a sufficient digitalization's degree of public structures, without which it is problematic to receive and transmit data for building the model, and perform related calculations.

Keywords

Society, economics, management, governance, crises, socio-economic modeling, forecasting, differential equations, partial derivatives, linearization

For citation: Egorov V.V. (2022) Modeling the dynamics of two-factor socio-economic states through mappings close to extension. *Vestnik universiteta*, no. 8, pp. 104–110.

ВВЕДЕНИЕ

Внедрение цифровых технологий информационного характера, мониторинга, администрирования на государственном, региональном, муниципальном и прочих уровнях само по себе способствует повышению эффективности взаимодействия населения, бизнеса, различных общественных организаций и властей, увеличению скорости и качества предоставляемых физическим и юридическим лицам государственных услуг, упрощению принятия управленческих решений и улучшению их качества.

Цифровизация не ограничивается лишь вопросами передачи информации и электронным документооборотом. Поэтому для обеспечения ее прочих функций важно формирование не только профильных баз знаний и данных, содержательных, регулярно актуализируемых, транспарентных, контролируемых гражданами и независимыми общественными структурами. Также довольно важна разработка математических моделей функционирования социальной, политической, экономической, экологической сред, в которых протекает жизнь общества. Создаваемые модели, обращающиеся к различным базам данных, включая статистические данные государственной и иной статистики, можно объединять в специализированные реестры, доступные через сеть «Интернет». Их использование помогает лучше ориентироваться в существенно непростом окружающем мире. Результаты прогнозирования посредством модели позволяют делать выбор дальнейших действий более адекватным ситуации, а выбор способа управления – в большей степени влекущим требуемые последствия и, как следствие, более предсказуемое и устойчивое состояние системы. В противном случае, как обосновано в работах лауреата Нобелевской премии по экономике 2002 г. Д. Канемана [1], в сложных условиях неопределенности человек зачастую принимает решения иррационально, а не руководствуясь понятием выгоды или существенно осмысленными рассуждениями, как считалось ранее.

Целью настоящей работы было построение такого образа социально-экономической реальности, который демонстрирует динамику изменения текущего состояния в зависимости от локальных изменений значимых параметров. Кроме того, исходя из знания отмеченной динамики, было желательно получить в явном виде зависимость факторов, описывающих социально-экономическую систему, от параметров, влияющих на нее. Поясним, что речь идет о разработке не оптимизационной, а описательной модели. Оптимизационная модель возникает, когда задается хотя бы одна целевая функция. Использование маржинальных (предельных) величин типично для современных экономической науки и менеджмента, однако нами была поставлена задача использовать в процессе моделирования относительно новые результаты математических исследований анализа отображений специального вида, начало систематического изучения которых относится к середине 1960-х гг. [2; 3].

МЕТОДОЛОГИЯ

В отношении проблемы моделирования сложных систем окружающего мира Р. Беллман отмечал: «…the Scientist, like the Pilgrim, must end a straight and narrow path between the Pitfalls of Oversimplification and the Morass of Overcomplication» (рус. «Ученый, подобно пилигриму, должен идти прямой и узкой тропой между западнями переупрощения и болотом переусложнения») [4, с. X].

Для реализации приведенного напутствия предлагается подход к моделированию социально-экономического пространства, состояния в котором описываются с точки зрения исследователя двумя значимыми численно представленными факторами F^1 и F^2, зависящими от также численно представленных компонент x^1 и x^2. Используемый подход представляет собой локальную линеаризацию, вообще говоря, нелинейных структур. Существуют различные математико-статистические, эконометрические методы, позволяющие на основе наблюдений в аналитическом виде строить приближенные зависимости вида:

$$F^i = F^i(x^1, x^2),\ \ i = 1, 2. \tag{1}$$

Но мы будем рассматривать ситуации, когда наблюдения позволяют описать функциональные зависимости $\phi_{ij}(x^1, x^2)$ скоростей изменения факторов F^1 и F^2, а значит, социально-экономических позиций (положений), от локальных изменений их аргументов:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x) = F^i_{x^j} = F^i_{x^j}(x) = \partial F^i(x^1, x^2)\big/\partial x^j,\ \ i = 1, 2,\ j = 1, 2, \tag{2}$$

где $\partial F^i(x^1, x^2)\big/\partial x^j$ – частная производная первого порядка изначально неизвестной функции F^i по переменной x^j в точке $x = (x^1, x^2) \in R^2$.

При этом будем исходить из допущения достаточной гладкости (непрерывной дифференцируемости) функций, используемых для аппроксимации. Указанное допущение можно принять при эволюционном развитии общества, при его функционировании в отсутствие каких-либо кризисов.

Пусть особенности моделируемой социально-экономической ситуации позволяют считать, что рассматриваемые факторы в некотором смысле «сонаправлены» или однотипно меняются при изменении своих аргументов, то есть при изменении аргумента x^j локально наблюдаются такими, что скорости их изменений локально пропорциональны:

$$F^1_{x^1}(x) = k_{11}(x)F^2_{x^1}(x),\ \ F^1_{x^2}(x) = k_{12}(x)F^2_{x^2}(x), \tag{3}$$

где коэффициенты пропорциональности $k_{11}(x)$ и $k_{12}(x)$ из R^1 зависят от состояния $x = (x^1, x^2)$. Как для функций $F^j(x)$, так же и для функций $k_{11}(x)$ и $k_{12}(x)$ будем полагать, что при типичном функционировании общества они изменяются достаточно гладко в непрерывнодифференцируемом смысле.

Описанный подход позволяет проводить исследования, используя методы математического анализа, систем дифференциальных уравнений с частными производными и отображений с ограниченным искажением [5]. Изначально работы по этой тематике имели естественно-научные приложения. Однако есть основания, отмеченные в исследовании, использовать эти работы также при изучении общественных явлений и процессов. При этом важно определиться с границами их применимости, что, в частности, обуславливает выбор функциональных пространств при моделировании.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Можно заметить, что описанные зависимости скоростей изменения факторов представляются переопределенной системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$F'(x) = \frac{trF'(x)}{2} M(x), \tag{4}$$

где $M(x) = (m_{ij}(x))_{i,j=1,2}$ – заданная матрица, $F'(x) = (F^i_{x^j}(x))_{i,j=1,2}$ – матрица Якоби, $trF'(x)$ – след матрицы Якоби. Действительно, поэлементная запись данной системы и несложные преобразования влекут, в частности, равенства:

$$F^1_{x^2}(x) = \frac{m_{12}(x)}{2}\left(\frac{m_{11}(x)}{2 - m_{11}(x)} + 1\right) F^2_{x^2}(x), \tag{5}$$

$$F^2_{x^1}(x) = \frac{m_{21}(x)}{2}\left(\frac{m_{22}(x)}{2 - m_{22}(x)} + 1\right) F^1_{x^1}(x), \tag{6}$$

которые после переобозначений дают соответствующие пропорциональные зависимости. Помимо них из системы также получаем:

$$F^1_{x^1}(x) = \frac{m_{11}(x)}{2 - m_{11}(x)} F^2_{x^2}(x), \;\; F^2_{x^2}(x) = \frac{m_{22}(x)}{2 - m_{22}(x)} F^1_{x^1}(x), \tag{7}$$

откуда с необходимостью следует: $m_{11}(x)m_{22}(x) = (2 - m_{11}(x))(2 - m_{22}(x))$.

Заметим, что если наблюдения, на основе которых строится социально-экономическая модель в виде рассматриваемой системы, демонстрируют несущественную зависимость между скоростями $F^1_{x^1}(x)$ и изменения факторов, то в этом случае $m_{11}(x)$ и $m_{22}(x)$ следует выбирать в некотором смысле близкими или $F^2_{x^2}(x)$ равными нулю. В противном случае имеет место пропорциональность таких скоростей, смысл которой состоит в том, что степень влияния компоненты x^1 на фактор F^1 примерно такая, как степень влияния компоненты x^2 на фактор F^2 с точностью до некоторого коэффициента пропорциональности, зависящего от состояния $x = (x^1, x^2)$, что снова можно интерпретировать как случай социально-экономических преобразований без катаклизмов.

Доказанные в [6] теоремы о необходимых и достаточных условиях интегрируемости полученной системы указывают на наличие более тесных взаимосвязей между элементами матрицы $M(x)$. А именно:

Теорема 1. Пусть D – область в R^n ($n \geq 2$) и F: $D \to R^n$ – отображение класса $C^3(D)$ такое, что всюду в D $\det F'(x) \neq 0$ и $\mathrm{tr}F'(x) \neq 0$. И пусть также задана матрица $M(x) = F'(x)/(\mathrm{tr}F'(x)/n)$. Тогда справедливо равенство:

$$d\ln\left|\frac{trF'(x)}{n}\right| = \Lambda(M(x)), \tag{8}$$

где $\Lambda(M(x)) = \frac{1}{\det M(x)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{n-1} M^i \wedge *_n d\Delta^i(x)$, $M^i(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x)dx^j$, $\wedge$ – символ внешнего произведения дифференциальных форм, $*_n$ – оператор Ходжа ($*_n c(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = c(x)$), $\Delta^i(x) = M^1(x) \wedge \ldots \wedge M^{i-1}(x) \wedge M^{i+1}(x) \wedge \ldots \wedge M^n(x)$.

Теорема 2. Пусть D – односвязная область в R^n. Тогда, если матрица $M(x)_{n\times n} \in C^2(D)$ с $\det M(x) \neq 0$ и $\mathrm{tr}M(x) = n$, $x \in D$, такова, что при $n \geq 3$ выполнены соотношения $dM^i(x) = M^i(x) \wedge \Lambda(M(x))$, $i = 1,\ldots,n$, а при $n = 2$ еще и соотношение $d\Lambda(M(x)) = 0$, то существует, и притом единственное, отображение F: $D \to R^n$ класса $C^3(D)$, удовлетворяющее системе $F'(x) = (\mathrm{tr}F'(x)/n)M(x)$ и условиям нормировки: $F(a) = A$, $\mathrm{tr}F'(x)/n = r$, где $a \in D$, $A \in R^n$, $r \in R^1$ – фиксированные точки и значение. При этом отображение $F(x)$ выражается формулой:

$$F^i(x) = A^i + r\int_a^x M^i(y)\exp\left(\int_a^y \Lambda(M(z))\right),\ i = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

Если требуется, то для упрощения восприятия полученную модель можно переписать как матричное равенство:

$$\begin{bmatrix} F^1_{x^1}(x) & F^1_{x^2}(x) \\ F^2_{x^1}(x) & F^2_{x^2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x)F^2_{x^2}(x) & a_{12}(x)F^2_{x^2}(x) \\ a_{21}(x)F^1_{x^1}(x) & a_{22}(x)F^1_{x^1}(x) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

а сами зависимости факторов от их компонент восстанавливаются как указано в теореме 2.

ДИСКУССИЯ

Совершенно очевидно наличие недостаточной адекватности при описании реальности у простых моделей сложных явлений, процессов и систем, к которым, несомненно, относятся социальные, экономические, политические, экологические. Прогностические функции таких моделей, как правило, не вполне оправдывают ожидания, а основанные на полученных прогнозах управленческие решения могут приводить к нежелательным последствиям. Ошибочно всегда решать сложные проблемы простыми методами, изучать которые можно и нужно в первую очередь в пропедевтических целях, а также для упрощения расчетов в некоторых случаях аппроксимации поведения моделируемых конструкций. В настоящей работе был предложен компромиссный подход к моделированию с использованием идеи локальной линеаризации скоростей изменения изучаемых факторов.

Заметим, что в рассмотренной модели социально-экономических позиций отображения оказываются близкими к растяжению (сжатию) в случае, когда матрица $M(x)$ близка к единичной. Такого типа ситуации в жизнедеятельности общественных, политических, экономических, экологических и прочих структур имеют место в отсутствие резких изменений, изломов, разрывов в привычном ходе дел.

В общем случае близость матрицы $M(x) = M(x)_{n\times n}$ к единичной можно оценивать поточечно, то есть для каждого x, или интегрально посредством числа обусловленности $c_M(x) = cond(M(x))$, основанного на матричной норме, подчиненной какой-либо векторной норме [7]:

$$c_M(x) = cond(M(x)) = \|M(x)\|\cdot\|M^{-1}(x)\| = \frac{\sup\limits_{y\neq 0}\dfrac{\|M(x)y\|}{\|y\|}}{\inf\limits_{y\neq 0}\dfrac{\|M(x)y\|}{\|y\|}} \geq 1. \tag{11}$$

При фиксированном x доказано, что чем ближе $c_M(x)$ к единице, тем ближе фиксированная матрица $M(x)$ к некоторой перестановочной матрице P и потому, возможно, к единичной матрице I. Тогда, если значение $c_M(x)$ оказалось близко к единице, то дополнительно можно рассмотреть произведение величины $c_M(x)/n$ на сумму всех диагональных элементов $M(x)$, которое будет ближе к единице в случае близости $M(x)$ к I. А интеграл от указанного произведения по области рассмотрения состояний x в сравнении с мерой этой области (площадью при $x \in R^2$) даст локальный критерий близости переменной матрицы $M(x)$ к I.

В случае использования евклидовой нормы матрицы при определении числа обусловленности матрицы, данное число имеет геометрический смысл, демонстрирующий, насколько неравномерно преобразование M(x) растягивает пространство скоростей изменения факторов по своим главным направлениям. Также о степени растяжения вдоль главных направлений говорят собственные числа отображения в точке x. Дополнительные специализированные исследования в изучаемой социально-экономической системе должны формировать интервально задаваемые условия, при возникновении которых описанные изменения состояния x ведут к кризисным ситуациям, чье предупреждение следует относить к функциям управления. Математическое моделирование, численные методы расчетов [7] и цифровизация процессов управления способны помочь в выработке обоснованных решений, связанных с проблематикой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учет всех особенностей подлежащей мониторингу, исследованию и управлению социально-экономической системы, значений и характеристик ее значимых факторов зачастую невозможен из-за объективной сложности ситуации, по техническим или организационным причинам, из-за дороговизны финансовых затрат на обследование. Поэтому следует использовать статистический метод выборочного наблюдения за рассматриваемой системой [8], отвечающий требованиям репрезентативности, обеспечивающий случайный отбор данных. Теоретические основы корректности и оправданности применения указанного метода обоснованы в теоремах устойчивости Чебышева и Ляпунова [9].

Установленные таким образом сведения позволяют провести математическое социально-экономическое моделирование в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в пространстве с достаточно гладкими функциями. Полученная модель описывает изменение скоростей некоторых факторов, значимых с точки зрения исследователя или заказчика моделирования, в зависимости от изменения влияющих на эти факторы параметров. При этом специально не оговаривается, включается или нет в эту модель параметр времени, – все зависит от конкретных особенностей ситуации. Кроме того, для большей наглядности, описанная модель содержала два фактора, но связанные с ней утверждения и обозначения приводились для случая произвольной размерности, предоставляя возможности дальнейших обобщений.

Прочие обобщения построенной модели могут быть связаны, например, с ослаблением требований гладкости, с использованием отображений Липшица [10] или с привлечением отображений из функциональных пространств Соболева [5; 11]. Кроме того, изменения скоростей включенных в модель факторов локально можно описывать не только в терминах растяжений или сжатий. Также возможны и иные локальные траектории изменений скоростей факторов, но выявление таких ситуаций – предмет отдельного исследования.

Расчеты на основе моделей полученного типа при возможно большем переходе к цифровизации процессов управления позволяют оперативно реагировать на возникновение проблем, чтобы своевременно исключить их негативные последствия, которые могут проявляться в снижении уровня жизни, безопасности населения, в возникновении социальных волнений. И наоборот, используя построенную модель, меняя ее параметры вручную (например, в целях экспериментирования или в соответствии с предполагаемыми корректировками федерального или местного законодательства) или задействуя имитационный подход [12], можно искать или проверять, в каком случае социально-экономическая ситуация будет улучшаться. Для этого необходимо дополнительное задание и учет одного или нескольких оптимизационных критериев. Тогда принятие решений осуществляется на основе классических подходов [13] или с использованием нечетких условий [14].

Библиографический список

1. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. In: MacLean L. and Ziemba W. (eds.) *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making*. World Scientific Publishing Company; 2013. P. 99–127. https://doi.org/10.1142/9789814417358_0006
2. Решетняк Ю.Г. *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе: монография*. Новосибирск: Изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН; 1996. 424 с.
3. Ahlfors L.V. *Möbius transformations in several dimensions*. Minneapolis: University of Minnesota; 1981. 150 p.
4. Bellman R. *Dynamic programming*. Dover Publications Inc.; 2003. 384 p.
5. Reshetnyak Yu.G. *Space mappings with bounded distortion*. Providence: American Mathematical Society; 1989. 362 p.
6. Егоров В.В. О системе дифференциальных уравнений, описывающей отображения с ограниченным искажением. Вестник Волгоградского государственного университета. Математика, физика. *Серия 1: Математика. Физика*. 2004;(8):18–27.
7. Corriou J.-P. *Numerical Methods and Optimization: Theory and Practice for Engineers*. Springer; 2021. 730 p.
8. Ros F, Guillaume S. *Sampling Techniques for Supervised or Unsupervised Tasks*. Springer; 2020. 232 p.
9. Borovkov A.A. *Probability Theory*. Springer; 2013. 733 p.
10. Cobzaş S., Miculescu R., Nicolae A. *Lipschitz Functions*. Springer; 2019. 593 p.
11. Егоров В.В. Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной однородной функцией. *Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2007;7(2):14–20. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2007-7-2-14-20

12. D'Acci L. (ed.) *The Mathematics of Urban Morphology*. Springer, Birkhäuser; 2019. 556 p.
13. Munda G. *Social Multi-Criteria Evaluation For a Sustainable Economy*. Springer; 2008. 215 p.
14. Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В. *Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология*. М.: Машиностроение-1; 2004. 335 с.

References

1. Kahneman D., Tversky A. Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. In: MacLean L. and Ziemba W. (eds.) *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making*. World Scientific Publishing Company; 2013. P. 99–127. https://doi.org/10.1142/9789814417358_0006
2. Reshetnyak Yu.G. *Stability theorems in geometry and analysis: monograph*. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics Publ. House; 1996. (In Russian).
3. Ahlfors L.V. *Möbius transformations in several dimensions*. Minneapolis: University of Minnesota; 1981.
4. Bellman R. *Dynamic programming*. Dover Publications Inc.; 2003.
5. Reshetnyak Yu.G. *Space mappings with bounded distortion*. Providence: American Mathematical Society; 1989.
6. Egorov V.V. On a system of differential equations describing mappings with bounded distortion. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika, fizika*. 2004;(8):18–27.
7. Corriou J.-P. *Numerical Methods and Optimization: Theory and Practice for Engineers*. Springer; 2021.
8. Ros F, Guillaume S. *Sampling Techniques for Supervised or Unsupervised Tasks*. Springer; 2020.
9. Borovkov A.A. *Probability Theory*. Springer; 2013.
10. Cobzaş S., Miculescu R., Nicolae A. *Lipschitz Functions*. Springer; 2019.
11. Egorov V.V. Recovering of a mapping via Jacobi matrix normalized by a homogeneous function. *Izvestiya of Saratov University. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2007;7(2):14–20. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2007-7-2-14-20
12. D'Acci L. (ed.) *The Mathematics of Urban Morphology*. Springer, Birkhäuser; 2019.
13. Munda G. *Social Multi-Criteria Evaluation For a Sustainable Economy*. Springer; 2008.
14. Diligenskii N.V., Dymova L.G., Sevastianov P.V. *Fuzzy modeling and multicriteria optimization of production systems under uncertainty: technology, economics, ecology*. Moscow: Mashinostroenie-1; 2004. (In Russian).