

Адаптация инструментов оценки портфельного риска с учетом волатильности

Коржнев Станислав Владимирович

Канд. экон. наук, ассист. каф. математических методов в экономике и управлении¹,
ассист. деп. анализа данных и машинного обучения²
ORCID: 0000-0003-1540-0827, e-mail: sv_korzhnev@guu.ru

¹Государственный университет управления, г. Москва, Россия

²Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва, Россия

Аннотация

Статья посвящена анализу корреляции активов на российском фондовом рынке. Цель исследования – выяснить, являются ли соответствующие коэффициенты корреляции постоянными. Результаты теста Дженнриха и проведенного корреляционного анализа свидетельствуют о том, что при разных уровнях волатильности коэффициенты корреляции существенно различаются: при высокой волатильности они в несколько раз больше, чем при низкой. Для оценки рисков представляет особую важность корреляция в условиях повышенной волатильности, поскольку подобная волатильность сопровождается негативные движения рынка. Использование обычных коэффициентов корреляции приводит к переоценке влияния диверсификации на снижение волатильности портфеля, содержащего акции российского фондового рынка, и, соответственно, к недооценке рисков портфеля. Более корректно риски можно оценить, применяя коэффициенты корреляции, соответствующие условиям высокой волатильности.

Ключевые слова

Российский фондовый рынок, диверсификация, корреляция, оценка рисков, тест Дженнриха

Для цитирования: Коржнев С.В. Адаптация инструментов оценки портфельного риска с учетом волатильности // Вестник университета. 2022. № 12. С. 154–161.

Volatility-based adjustments to portfolio risk assessment tools

Stanislav V. Korzhnev

Cand. Sci. (Econ.), Assistant at the Department of Mathematical Methods in Economics and Management¹,
Assistant at the Department of Data Analysis and Machine Learning²
ORCID: 0000-0003-1540-0827, e-mail: sv_korzhnev@guu.ru

¹State University of Management, Moscow, Russia

²Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Abstract

The article is devoted to the analysis of correlation between assets in the Russian stock market. The purpose of the study is to assess the stability of correlation coefficients. The results of the Jennrich test and correlation analysis carried out indicate that correlation coefficients differ significantly for different volatility levels, that is, the coefficients in times of high volatility are significantly higher than those in times of low volatility. Correlations during periods of heightened volatility are key for assessing risks, since it is such volatility that characterizes negative market movements. The use of conventional correlation coefficients leads to an overestimation of the role of diversification in reducing the volatility in a portfolio of Russian assets and thus an underestimation of the investment portfolio risks. Risks can be assessed more accurately if correlation coefficients corresponding to periods of high volatility are used.

Keywords

Russian stock market, diversification, correlation, risk assessment, Jennrich test

For citation: Korzhnev S.V. (2022) Volatility-based adjustments to portfolio risk assessment tools. *Vestnik universiteta*, no. 12, pp. 154–161.



ВВЕДЕНИЕ

Портфельная теория Г. Марковитца [1], разработанная в 1952 г., пользуется популярностью и по сей день. Она предполагает формирование эффективного портфеля как результат решения задачи по минимизации риска, причем в качестве способа снижения риска используется диверсификация. Увеличение количества активов в портфеле приводит к снижению стандартного отклонения доходности, то есть широкая диверсификация теоретически может существенно снизить риск портфеля.

Проблема диверсификации портфеля затрагивается во множестве работ. Проанализировав данные американского фондового рынка, авторы первого и на сегодняшний день самого цитируемого исследования на обозначенную тему [2] пришли к следующему заключению: если портфель расширен до 15 акций, при добавлении новых акций риск перестает снижаться. Спустя примерно 40 лет в статье, автор которой использовал ту же методику, был сделан вывод, что граница сдвинулась до 40–50 акций [3].

На основе данных американского фондового рынка исследователи продемонстрировали, что при увеличении числа акций в портфеле с 1 до 1000 его стандартное отклонение снижается на 61 %, однако когда портфель уже содержит 30 акций и уменьшение стандартного отклонения достигает 58 %, добавление новых акций дает совсем незначительный эффект [4].

Эксперты, изучавшие корреляцию и волатильность отдельных акций на американском фондовом рынке [5], пришли к выводу, что за период с 1962 по 1997 г. взаимная корреляция акций уменьшилась, их средняя волатильность выросла, а волатильность рынка в целом почти не изменилась. По заключению экспертов, совокупность данных факторов и является причиной роста оптимального портфеля с 15 до 50 бумаг.

Необходимо отметить, что российские авторы также рассматривают диверсификацию как основу управления рисками портфеля ценных бумаг. В частности, данной теме посвящено исследование Т.В. Асмаковой и Ж.М. Корзоватых [6].

ПОСТОЯНСТВО МАТРИЦЫ КОРРЕЛЯЦИЙ НА РОССИЙСКОМ ФОНДОВОМ РЫНКЕ

То, что корреляционная матрица доходностей активов устойчива во времени, является предпосылкой формирования оптимального портфеля. Но имеет ли данное свойство матрица корреляций на российском фондовом рынке? Согласно результатам одного из релевантных исследований, матрицы корреляций в условиях растущего и падающего тренда не одинаковы [7]. В целях проверки устойчивости матрицы корреляций на российском фондовом рынке предлагается разбить выборку на два временных интервала, рассчитать матрицы корреляций для каждого из них, после чего разделить полученные данные на две подвыборки по волатильности и рассчитать соответствующие им матрицы корреляций. Затем представляется целесообразным проверить эквивалентность матриц корреляций с помощью теста Дженириха и сделать вывод об их устойчивости.

Для расчета матрицы корреляций были использованы дневные доходности 9 акций и депозитарных расписок с наибольшим весом в индексе Московской биржи (далее – Мосбиржа) и наибольшими объемами торгов за 2021 г. Речь идет об обыкновенных акциях ПАО «Сбербанк» с тикером SBER, Банка ВТБ (ПАО) с тикером VTBR, ПАО «Газпром» (GAZP), ПАО «ЛУКОЙЛ» (LKOH), ПАО «ГМК „Норильский никель“» (GMKN), ПАО «НОВАТЭК» (NVTK), ПАО «НК „Роснефть“» (ROSN), а также депозитарных расписках на акции PLLC Yandex N.V. (YNDX) и TCS Group Holding PLC, или «Тинькофф» (TCSG). Необходимо отметить, что в топ-10 акций по объему торгов входят и обыкновенные, и привилегированные акции ПАО «Сбербанк»; при этом показатели обыкновенных акций существенно выше. Чтобы избежать завышения среднего уровня коэффициентов корреляции, привилегированные акции были исключены из исследования. В качестве временных рамок использовались два интервала: с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г. и с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г. Поскольку торги депозитарными расписками на акции «Тинькофф» начались только 29 октября 2019 г., по ним коэффициенты корреляции за период с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г. не рассчитывались. Полученные матрицы представлены в виде таблиц 1 и 2.

Таблица 1

**Корреляция акций на российском фондовом рынке за период
с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г.**

Тикер	GAZP	SBER	VTBR	LKOH	GMKN	NVTK	ROSN	YNDX	TCSG
GAZP	1,000	0,796	0,694	0,811	0,592	0,727	0,809	0,615	0,646
SBER	0,796	1,000	0,791	0,723	0,551	0,653	0,775	0,686	0,654
VTBR	0,694	0,791	1,000	0,627	0,531	0,573	0,745	0,662	0,528
LKOH	0,811	0,723	0,627	1,000	0,568	0,735	0,858	0,539	0,579
GMKN	0,592	0,551	0,531	0,568	1,000	0,607	0,597	0,479	0,436
NVTK	0,727	0,653	0,573	0,735	0,607	1,000	0,714	0,482	0,555
ROSN	0,809	0,775	0,745	0,858	0,597	0,714	1,000	0,599	0,584
YNDX	0,615	0,686	0,662	0,539	0,479	0,482	0,599	1,000	0,606
TCSG	0,646	0,654	0,528	0,579	0,436	0,555	0,584	0,606	1,000

Составлено автором по материалам исследования

Таблица 2

**Корреляция акций на российском фондовом рынке за период
с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г.**

Тикер	GAZP	SBER	GMKN	LKOH	ROSN	VTBR	NVTK	YNDX
GAZP	1,000	0,403	0,299	0,389	0,404	0,299	0,321	0,162
SBER	0,403	1,000	0,379	0,370	0,401	0,380	0,356	0,281
GMKN	0,299	0,379	1,000	0,368	0,360	0,240	0,332	0,152
LKOH	0,389	0,370	0,368	1,000	0,511	0,277	0,361	0,161
ROSN	0,404	0,401	0,360	0,511	1,000	0,280	0,319	0,136
VTBR	0,299	0,380	0,240	0,277	0,280	1,000	0,255	0,141
NVTK	0,321	0,356	0,332	0,361	0,319	0,255	1,000	0,160
YNDX	0,162	0,281	0,152	0,161	0,136	0,141	0,160	1,000

Составлено автором по материалам исследования

Из данных таблиц 1 и 2 следует, что средние коэффициенты корреляции выросли. Если средний коэффициент за период с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г. был равен 0,303, то значение аналогичного показателя за период с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г. составило 0,642. Таким образом, средний рост коэффициентов корреляции – 112 %. Подобные значения не позволяют утверждать, что для указанных активов корреляционная матрица является устойчивой. Учитывая, что за рассматриваемый промежуток времени компании, по акциям которых были рассчитаны матрицы, почти не изменились с фундаментальной точки зрения (речь идет, в частности, об их отраслях деятельности и рынках сбыта), полученный результат нельзя назвать ожидаемым.

КОРРЕЛЯЦИЯ АКТИВОВ ПО ДВУМ ПОДВЫБОРКАМ С РАЗНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

Если целью является уменьшение риска портфеля, имеет значение скорее не то, насколько большим является коэффициент корреляции активов в целом, а то, какова величина коэффициента корреляции во время негативного тренда. Стоит подчеркнуть, что в таких условиях показатели волатильности как раз существенно выше, чем во время растущего или нейтрального тренда, о чем свидетельствуют различные исследования [8; 9].

Что касается показателей волатильности, между выбранными периодами наблюдается существенное различие: в 2020–2022 гг. резкие движения рынка случались намного чаще, чем в 2017–2019 гг. Можно выдвинуть следующую гипотезу: при сильных движениях рынка корреляция активов существенно выше, чем при умеренных, что и обуславливает разницу коэффициентов корреляции за разные периоды.

Для проверки данной гипотезы были рассчитаны матрицы корреляций по двум подвыборкам – с низкой и высокой волатильностью (табл. 3). Чтобы отделить дни с различающимися уровнями волатильности, использовалась типовая граница [9] в два стандартных отклонения. Днями с высокой волатильностью предлагается считать те дни, когда дневная доходность индекса Мосбиржи находилась вне интервала:

$$(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma), \quad (1)$$

где $\bar{x}$ – средняя дневная доходность индекса Мосбиржи, σ – стандартное отклонение дневной доходности индекса Мосбиржи.

Днями с низкой волатильностью названы дни, когда дневная доходность находилась внутри указанного интервала. Матрицы корреляций по подвыборкам с разным уровнем волатильности представлены в виде таблицы 3.

Таблица 3

Корреляция акций на российском фондовом рынке за период с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г. по подвыборкам с низкой и высокой волатильностью

Подвыборка с низкой волатильностью									
Тикер	GAZP	SBER	VTBR	LKOH	GMKN	NVTK	ROSN	YNDX	TCSG
GAZP	1,000	0,480	0,429	0,500	0,339	0,500	0,516	0,179	0,225
SBER	0,480	1,000	0,473	0,345	0,282	0,366	0,367	0,236	0,320
VTBR	0,429	0,473	1,000	0,281	0,317	0,291	0,340	0,226	0,193
LKOH	0,500	0,345	0,281	1,000	0,253	0,459	0,640	0,095	0,158
GMKN	0,339	0,282	0,317	0,253	1,000	0,370	0,325	0,192	0,176
NVTK	0,500	0,366	0,291	0,459	0,370	1,000	0,451	0,151	0,215
ROSN	0,516	0,367	0,340	0,640	0,325	0,451	1,000	0,095	0,221
YNDX	0,179	0,236	0,226	0,095	0,192	0,151	0,095	1,000	0,346
TCSG	0,225	0,320	0,193	0,158	0,176	0,215	0,221	0,346	1,000
Подвыборка с высокой волатильностью									
Тикер	GAZP	SBER	VTBR	LKOH	GMKN	NVTK	ROSN	YNDX	TCSG
GAZP	1,000	0,937	0,810	0,932	0,794	0,863	0,924	0,834	0,891
SBER	0,937	1,000	0,939	0,894	0,774	0,840	0,951	0,927	0,851
VTBR	0,810	0,939	1,000	0,786	0,717	0,763	0,918	0,887	0,708
LKOH	0,932	0,894	0,786	1,000	0,808	0,896	0,948	0,762	0,823
GMKN	0,794	0,774	0,717	0,808	1,000	0,832	0,815	0,733	0,681
NVTK	0,863	0,840	0,763	0,896	0,832	1,000	0,877	0,713	0,820
ROSN	0,924	0,951	0,918	0,948	0,815	0,877	1,000	0,841	0,780
YNDX	0,834	0,927	0,887	0,762	0,733	0,713	0,841	1,000	0,767
TCSG	0,891	0,851	0,708	0,823	0,681	0,820	0,780	0,767	1,000

Составлено автором по материалам исследования

Средний коэффициент корреляции по подвыборке с низкой волатильностью за период с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г. оказался равен 0,315. При низкой волатильности колебания различных акций слабо коррелируют друг с другом, и относительно высокие коэффициенты корреляции наблюдаются преимущественно между компаниями одной отрасли, например ПАО «НК „Роснефть“» и ПАО «ЛУКОЙЛ», ПАО «Газпром» и ПАО «НОВАТЭК», ПАО «Сбербанк» и Банком ВТБ (ПАО).

Значение среднего коэффициента корреляции по подвыборке с высокой волатильностью за указанный период составило 0,834. При высокой волатильности колебания различных акций тесно коррелируют друг с другом, и наблюдаются значения коэффициентов корреляции между компаниями из разных отраслей (ПАО «Сбербанк» и ПАО «Газпром», ПАО «Сбербанк» и ПАО «НК „Роснефть“», Банком ВТБ (ПАО) и ПАО «НК „Роснефть“», ПАО «Сбербанк» и P.L.L.C. Yandex N.V.), превышающие 0,9.

Визуально матрицы существенно различаются, но для получения более точных выводов представляется необходимым провести статистический тест Дженнриха [10]. Существует также упрощенная версия

данного теста [11], однако в настоящем исследовании использован его оригинальный вариант. Рассчитаем J-статистику по следующей формуле:

$$J = \sum_{i=1}^2 \{tr(Z_i^2) - Z_d^T W^{-1} Z_d\}, \quad (2)$$

$$Z_i = n_i^{-\frac{1}{2}} R_p^{-1} (R_i - R_p), \quad (3)$$

$$W = I_p + R_p * R_p^{-1}, \quad (4)$$

где Z_d – вектор-столбец из диагональных элементов матрицы Z ; R_p – матрица корреляций размерности $p \times p$ по всей выборке; R_i – матрица корреляций размерности $p \times p$ по подвыборке i ; I_p – единичная матрица размерности $p \times p$; $R_p * R_p^{-1}$ – произведение Адамара.

В работе Р.И. Дженнриха [10] продемонстрировано, что J-статистика для двух подвыборок имеет асимптотическое распределение:

$$\chi^2(0,5p(p-1)) \quad (5)$$

Для представленных матриц выборочная J-статистика равна 1325,04, а критическое значение -статистики на уровне значимости 1 % составляет 58,62. Таким образом, согласно результатам теста Дженнриха, матрицы корреляций по двум подвыборкам не могут считаться идентичными.

Рассчитаны также матрицы корреляций по подвыборкам с разным уровнем волатильности для периода с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г. Результаты расчетов собраны в таблице 4.

Таблица 4

Корреляция акций на российском фондовом рынке за период с 1 января 2017 г. по 31 декабря 2019 г. по подвыборкам с низкой и высокой волатильностью

Подвыборка с низкой волатильностью								
Тикер	GAZP	SBER	GMKN	LKOH	ROSN	VTBR	NVTK	YNDX
GAZP	1,000	0,360	0,252	0,398	0,370	0,284	0,301	0,150
SBER	0,360	1,000	0,238	0,263	0,291	0,301	0,256	0,234
GMKN	0,252	0,238	1,000	0,248	0,268	0,144	0,227	0,077
LKOH	0,398	0,263	0,248	1,000	0,446	0,215	0,254	0,111
ROSN	0,370	0,291	0,268	0,446	1,000	0,218	0,228	0,090
VTBR	0,284	0,301	0,144	0,215	0,218	1,000	0,187	0,103
NVTK	0,301	0,256	0,227	0,254	0,228	0,187	1,000	0,117
YNDX	0,150	0,234	0,077	0,111	0,090	0,103	0,117	1,000
Подвыборка с высокой волатильностью								
Тикер	GAZP	SBER	GMKN	LKOH	ROSN	VTBR	NVTK	YNDX
GAZP	1,000	0,512	0,436	0,347	0,547	0,509	0,471	0,334
SBER	0,512	1,000	0,815	0,738	0,885	0,866	0,805	0,783
GMKN	0,436	0,815	1,000	0,822	0,797	0,823	0,834	0,859
LKOH	0,347	0,738	0,822	1,000	0,839	0,730	0,933	0,685
ROSN	0,547	0,885	0,797	0,839	1,000	0,809	0,911	0,689
VTBR	0,509	0,866	0,823	0,730	0,809	1,000	0,770	0,714
NVTK	0,471	0,805	0,834	0,933	0,911	0,770	1,000	0,704
YNDX	0,334	0,783	0,859	0,685	0,689	0,714	0,704	1,000

Составлено автором по материалам исследования

Средний коэффициент корреляции по подвыборке с низкой волатильностью за данный период оказался равен 0,237. Когда волатильность низка, колебания различных акций слабо коррелируют друг с другом, и даже значения коэффициентов корреляции между компаниями, ведущими деятельность в рамках одной отрасли, не превышают 0,5.

Средний коэффициент корреляции по подвыборке с высокой волатильностью оказался равен 0,713. При высокой волатильности наблюдается тесная корреляция между колебаниями акций, и отмечают значения коэффициентов корреляции между компаниями из разных отраслей (например, между ПАО «Сбербанк» и ПАО «НК „Роснефть“», ПАО «ГМК „Норильский никель“» и PLLC Yandex N.V.), превышающие 0,85.

Следует провести тест Дженриха и для матриц, представленных в виде таблицы 4. Выборочная J-статистика равна 131,78, а критическое значение -статистики на уровне значимости 1 % составляет 48,28. Таким образом, данные матрицы корреляций также не являются идентичными.

Можно констатировать, что при высокой волатильности корреляция на российском фондовом рынке в 2,5–3 раза больше, чем при низкой. Стоит отметить, что в условиях высокой волатильности коэффициенты корреляции демонстрируют устойчивость значений: и в период с 2017 по конец 2019 г., и в период с 2020 по начало 2022 г. одни и те же пары акций демонстрировали самые высокие коэффициенты корреляции. Основной причиной увеличения общих коэффициентов во второй период по сравнению с первым является большее количество дней с высокой волатильностью. При этом случаи резкого уменьшения стоимости активов, от которых инвесторы и хотят защититься диверсификацией, происходят как раз при высокой волатильности. Иными словами, фактическое снижение волатильности портфеля на российском фондовом рынке за счет диверсификации оказывается существенно меньше, чем рассчитанное по коэффициентам корреляции общей выборки.

Так, стандартное отклонение дневных доходностей акций ПАО «Сбербанк» и депозитарных расписок на акции PLLC Yandex N.V. за период с 1 января 2020 г. по 25 февраля 2022 г. составляет 2,18 % и 2,19 %, соответственно. Стандартное отклонение портфеля с равными долями этих активов, рассчитанное по коэффициенту корреляции всей выборки, – 1,82 %; данное значение на 17 % ниже значения среднего из стандартных отклонений для указанных активов. Отклонение, рассчитанное по коэффициенту корреляции подвыборки с высокой волатильностью, составляет 2,06 %; это значение ниже на 6 %. Можно заключить, что использование коэффициента корреляции общей выборки для оценки уровня понижения волатильности портфеля привело бы к тому, что эффект от диверсификации был переоценен в 3 раза.

ВЫВОДЫ

Российский фондовый рынок демонстрирует тесную и устойчивую корреляцию между активами в условиях высокой волатильности, тогда как при низкой волатильности корреляция между активами оказывается непостоянной и зачастую незначительной. Использование коэффициентов корреляции по общей выборке диверсификации будет приводить к систематической переоценке уменьшения волатильности портфеля в условиях высокой волатильности, которая наблюдается во время нисходящего тренда на рынке.

Для объективной оценки указанного эффекта в условиях нисходящего тренда следует использовать коэффициенты корреляции, рассчитываемые по подвыборке с высокой волатильностью. Поскольку значения данных коэффициентов достаточно велики (среднее значение превышает 0,7), по результатам расчетов уровень снижения волатильности портфеля окажется весьма скромным.

Таким образом, во время нисходящего тренда даже волатильность широко диверсифицированного по российским активам портфеля будет лишь немного меньше волатильности отдельных активов.

Библиографический список

1. Markowitz H. Portfolio selection. *The journal of finance*. 1952;7(1):77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
2. Evans J.L., Archer S.H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. *The journal of finance*. 1968;23(5):761–767. <https://doi.org/10.2307/2325905>
3. Benjelloun H. Evans and Archer – forty years later. *Investment management and financial innovations*. 2010;7(1):98–104.
4. Elton E.J., Gruber M.J. Risk reduction and portfolio size: an analytical solution. *The journal of business*. 1977;50(4):415–437.
5. Campbell J.Y., Lettau M., Malkiel B.G., Xu Y. Have individual stocks become more volatile? An empirical exploration of idiosyncratic risk. *The journal of finance*. 2001;56(1):1–43.

6. Асмакова Т.В., Корзоватых Ж.М. Диверсификация как метод управления инвестиционными рисками. В кн.: *Вопросы современной экономики и менеджмента: свежий взгляд и новые решения: сб. науч. трудов по итогам Международ. науч.-практ. конф., Екатеринбург, 10 марта 2016 г.* Н. Новгород; Екатеринбург: Инновационный центр развития образования и науки; 2016. С. 238–239.
7. Oskay B. *The curious case of portfolio selection: analysis of correlations and diversification over time*. Rotterdam: Erasmus University. Erasmus School of Economics; 2018.
8. Lee Ch.-J., Lai T.-N., Chiang Ch.-Ch., Yu H.-Ch. Dynamic conditional correlation and volatility distributions in Tokyo, London, and New York gold markets. *Investment management and financial innovations*. 2019;16(4):146–155. [https://doi.org/10.21511/imfi.16\(4\).2019.13](https://doi.org/10.21511/imfi.16(4).2019.13)
9. Vodenska I., Chambers W.J. Understanding the relationship between VIX and the S&P 500 index volatility. В кн.: *26th Australasian Finance and Banking Conference 2013, Sydney, December 17–19, 2013*. <http://doi.org/10.2139/ssrn.2311964>
10. Jennrich R.I. An asymptotic χ^2 test for the equality of two correlation matrices. *Journal of the American Statistical Association*. 1970;65(330):904–912. <https://doi.org/10.1080/01621459.1970.10481133>
11. Atiany T.A.M., Shamshuritawite S. New statistical test for testing several correlation matrices. *Global journal of pure and applied mathematics*. 2016;12(5):4285–4298.

References

1. Markowitz H. Portfolio selection. *The journal of finance*. 1952;7(1):77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
2. Evans J.L., Archer S.H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. *The journal of finance*. 1968;23(5):761–767. <https://doi.org/10.2307/2325905>
3. Benjelloun H. Evans and Archer – forty years later. *Investment management and financial innovations*. 2010;7(1):98–104.
4. Elton E.J., Gruber M.J. Risk reduction and portfolio size: an analytical solution. *The journal of business*. 1977;50(4):415–437.
5. Campbell J.Y., Lettau M., Malkiel B.G., Xu Y. Have individual stocks become more volatile? An empirical exploration of idiosyncratic risk. *The journal of finance*. 2001;56(1):1–43.
6. Asmakova T.V., Korzovatykh Zh.M. Diversification as a method of investment risk management. In: *Issues of Modern Economics and Management: A Fresh Look and New Solutions: Proceedings of the International Scientific & Practical Conference, Yekaterinburg, March 10, 2016*. Nizhny Novgorod; Yekaterinburg; 2016. P. 238–239.
7. Oskay B. *The curious case of portfolio selection: analysis of correlations and diversification over time*. Rotterdam: Erasmus University. Erasmus School of Economics; 2018.
8. Lee Ch.-J., Lai T.-N., Chiang Ch.-Ch., Yu H.-Ch. Dynamic conditional correlation and volatility distributions in Tokyo, London, and New York gold markets. *Investment management and financial innovations*. 2019;16(4):146–155. [https://doi.org/10.21511/imfi.16\(4\).2019.13](https://doi.org/10.21511/imfi.16(4).2019.13)
9. Vodenska I., Chambers W.J. Understanding the relationship between VIX and the S&P 500 index volatility. In: *26th Australasian Finance and Banking Conference 2013, Sydney, December 17–19, 2013*. <http://doi.org/10.2139/ssrn.2311964>
10. Jennrich R.I. An asymptotic χ^2 test for the equality of two correlation matrices. *Journal of the American Statistical Association*. 1970;65(330):904–912. <https://doi.org/10.1080/01621459.1970.10481133>
11. Atiany T.A.M., Shamshuritawite S. New statistical test for testing several correlation matrices. *Global journal of pure and applied mathematics*. 2016;12(5):4285–4298.