УДК 658

С.С. Логвинов

ОСОБЕННОСТИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ФОРМИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОМУ УПРАВЛЕНИЮ ПРОМЫШЛЕННЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ В УСЛОВИЯХ РЫНКА

Аннотация. *В статье рассматриваются вопросы, связанные с особенностями формализации задач по функционально-производственному управлению промышленными предприятиями в условиях рынка. Особое внимание при этом уделяется экономико-математическому и структурному моделированию производственных процессов на промышленных предприятиях.*

Ключевые слова: *промышленные предприятия, производственное управление, моделирование, производственные процессы, оптимизация, сетевые модели.*

Sergey Logvinov

FEATURES FORMALIZATION TASKS OF FORMATION OF SOLUTIONS FOR FUNCTIONAL AND PRODUCTION MANAGEMENT INDUSTRIAL ENTERPRISES IN THE MARKET

Annotation. *The article deals with issues related to the characteristics of the formalization of tasks of forming solutions for functional and production management of industrial enterprises in market conditions. Particular attention is paid to the economic and mathematical modeling of structural and manufacturing processes in industrial plants.*

Keywords: *industrial plants, industrial control, simulation, manufacturing processes, optimization, network models.*

Характерной особенностью функционально-производственного управления промышленными предприятиями является то, что производственный процесс может быть естественным образом представлен в виде комплексов взаимосвязанных мероприятий (работ, операций, действий), направленных на достижение общей конечной цели производства той или иной продукции. Логико-математическое описание таких комплексов и формирование управляющих воздействий удобно осуществлять с использованием сетевых моделей ресурсно-временной оптимизации. Функционально производственное управление промышленными предприятиями при таком подходе включает следующие три этапа: структурное моделирование производственного процесса; календарное планирование реализации этого процесса; оперативное управление производственным процессом на основе календарного плана.

Наиболее удобным подходом к структурному моделированию производственных процессов на промышленных предприятиях является использование математического аппарата теории графов. При этом моделируемый процесс представляется в виде сети, т.е. в виде ориентированного конечного связного графа, имеющего одну начальную вершину (источник) и одну конечную вершину (сток). Такая структуризация позволяет детально анализировать все мероприятия и вносить улучшения в структуру плана еще до начала его выполнения.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждого мероприятия и другие временные характеристики сетевой модели. Это позволяет, в частности, выявлять критические мероприятия, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить комплекс производственных мероприятий в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех мероприятий с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе функционально-производственного управления сетевая модель и календарный план используются для оперативной постановки задач исполнителям, составления периодических отчетов и осуществления контроля хода производственного процесса на предприятии. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части производственного процесса при осуществлении производства той или иной продукции предприятия [3]. Осуществление производственного процесса на промышленном предприятии всегда связано с использованием некоторых ресурсов. Поэтому при разработке календарного плана и функционально-производственном управлении процессом производства продукции необходимо принимать решения по распределению и перераспределению этих ресурсов. В зависимости от природы ресурсов и конкретных условий их использования различают ресурсы двух типов: невозобновляемые и возобновляемые.

Потребность предприятий в невозобновляемом ресурсе задается в виде функции $c_{ij}(t_{ij})$, которая определяет количество ресурса, необходимое для выполнения работы (i,j) за время t_{ij}. Следует подчеркнуть, что в реальных условиях ускорение проведения работы (уменьшение t_{ij}) обычно связано с увеличением расхода выделенного ресурса (увеличением $c_{ij}(t_{ij})$). Функции $c_{ij}(t_{ij})$ могут задаваться аналитически или в виде дискретных последовательностей. В последнем случае каждой работе ставят в соответствие две функции $c_{ij}(x_{ij})$ и $t_{ij}(x_{ij})$, где x_{ij} – номер варианта выполнения работы (i,j), а $c_{ij}(x_{ij})$ – количество ресурса, необходимое для выполнения работы за время $t_{ij}(x_{ij})$.

Возобновляемые ресурсы – это ресурсы типа мощности. Они в процессе выполнения мероприятий сами не расходуются, а производят сами или в сочетании с другими ресурсами некоторый расходуемый фактор (человеко-дни, машино-смены и т.д.). К ресурсам данного типа относят трудовые ресурсы, различные машины и механизмы, производственные мощности, автоматизированные рабочие места должностных лиц органов управления и т.п.

Различие между указанными типами ресурсов заключается в следующем. Невозобновляемые ресурсы, не будучи использованы в данный момент времени, могут быть использованы в более поздние моменты выполнения комплекса мероприятий. Недоиспользование же возобновляемых ресурсов в течение определенного времени приводит к потере того количества расходуемого фактора, который за это время мог бы быть произведен.

Потребность отдельной работы в возобновляемом ресурсе обычно характеризуется интенсивностью потребления ресурса z_{ij}. Причем z_{ij} – это количество ресурса, используемое в каждый момент времени выполнения работы (i,j). Важной характеристикой каждой работы является также ее объем $q_{ij} = t_{ij}z_{ij}$. Если объем работы не зависит от интенсивности потребления ресурса, то $t_{ij}=q_{ij}/z_{ij}$. В общем случае $t_{ij} = s_{ij}(z_{ij})$ – некоторая функция интенсивности потребления ресурса. Причем величина z_{ij} может быть непрерывной или принимать только дискретные значения. Последний случай является типичным при управлении мобилизационным развертыванием предприятия. В этом случае z_{ij} – количество исполнителей, привлекаемых для выполнения запланированной работы (i,j).

При рассмотрении задач ресурсно-временной оптимизации на сетях необходимо учитывать, что каждая работа может использовать один или несколько видов ресурсов (возобновляемых и (или) невозобновляемых). На использование ресурсов могут быть также наложены дополнительные ограничения, связанные с перемещением различных видов ресурсов в ходе выполнения работ, их одновременным использованием, графиками поступления ресурсов и т.п. В зависимости от принятого критерия оптимальности (выбранной целевой функции) различают задачи двух видов: задачи минимизации времени выполнения комплекса работ (или его отклонения от заданного срока) при ограничении выделенных количества и типов ресурсов; задачи минимизации количества ресурсов, необходимых для выполнения комплекса работ за директивный срок. Конкретные варианты формализации указанных зависят от совокупности факторов, которые необходимо учитывать при функционально-производственном управлении промышленными предприятиями.

При формализации задачи минимизации времени производства продукции при ограничениях на количество и взаимозаменяемость возобновляемых ресурсов структуру взаимосвязи и обусловленность планируемых производственных мероприятий (работ) целесообразно отображать в виде ориентированного графа $G\{(i, j)\}$, $i,j=1,2,\dots,m$, $i<j$, где m – число узлов графа, i, j – номера узлов. Граф G представляет собой сеть, т. е. имеет только одну начальную и одну конечную вершины, а также не имеет циклов. Каждой работе в этом графе ставится в соответствие дуга (i,j), соединяющая i-й и j- й узлы.

Последовательность работ формируется таким образом, что работа, соответствующая дуге, выходящей из некоторого узла, может быть начата только после окончания всех работ, входящих в этот узел. Каждая работа (i,j) характеризуется продолжительностью $\tau(i,j)$ и необходимым количеством $n(i, j)$ ресурсов. Для выполнения комплекса работ используется определенное множество возобновляемых ресурсов (работников, станков и т.п.), которое обозначим через $R=\{1, 2,..., K\}$.

Взаимозаменяемость этих ресурсов в формализованном виде определяется матрицей $\Delta=\|\delta^k(i,j)\|$, $k=1,2,\dots,K$, $(i,j)\in G$, где

$$\delta^k(i,j)=\begin{cases}1, \text{ если k-й тип ресурса может использоваться при выполнении} \\ \text{работы } (i,j), \\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Предположим, что: прерывание начатой работы не допускается; $n(i, j)$-const в течение всего времени выполнения комплекса работ, реализующих производственный процесс.

Календарный план реализации производственного процесса будем представлять в виде множества

$$Y = \{x(i,j), r(i,j) \mid (i,j)\in G, r(i,j)\subseteq R\},$$

где $x(i, j)$ – момент времени, в который начинается работа (i, j), $r(i, j)$ – множество возобновляемых ресурсов, привлекаемых к выполнению (i, j)-й работы.

Время выполнения всего комплекса работ, реализующих производственный процесс, равно максимальной продолжительности T пути из начальной вершины сетевого графа G в конечную при реализации плана Y, т. е.

$$T = \max_{L\in G_L} T_L(Y),$$

где T_L – продолжительность L – го пути сетевого графа производственного процесса при реализации плана Y,

G_L – множество путей из начальной вершины сетевого графа G в конечную.

С учетом принятых обозначений рассматриваемая задача минимизации времени реализации производственного процесса при ограничениях на количество взаимозаменяемых ресурсов и их возможности по выполнению работ может быть формально представлена в виде следующей нелинейной задачи математического программирования:

определить календарный план реализации производственного процесса

$$Y^* = \{x^*(i,j), r^*(i,j) \mid (i,j)\in G, r^*(i,j)\subseteq R\}, \tag{3.2.1}$$

такой, что

$$T^* = T(Y^*) = \min_{Y} \max_{L \in G_L} T_L(Y) \qquad (3.2.2)$$

при

$$x(i,j) \geq \max_{(l,i) \in G} \left[x(l,i) + \tau(l,i) \right], \qquad (3.2.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in F(t)} n(i,j) \leq K, \quad 0 \leq t \leq T, \quad F(t) \in G, \qquad (3.2.4)$$

$$\sum_{k \in r(i,j)} \delta^k(i,j) = n(i,j), \quad (i,j) \in G, \qquad (3.2.5)$$

$$\sum_{k=i}^{k} \delta^k(i,j) \geq n(i,j), \quad (i,j) \in G, \qquad (3.2.6)$$

где $F(t)$ – множество работ, выполняемых в текущий момент времени t.

В сформулированной задаче ограничения (3.2.3)–(3.2.6) имеют следующий смысл:

– ограничение (3.2.3) устанавливает, что работы, выходящие из любого узла сетевого графа, могут быть начаты только после завершения всех работ, входящих в этот узел;

– ограничение (3.2.4) определяет, что количество одновременно привлекаемых возобновляемых ресурсов не может превышать их общего количества;

– ограничение (3.2.5) требует, чтобы на каждую работу выделялось установленное количество ресурсов;

– ограничение (3.2.6) требует, чтобы количество ресурсов соответствующего типа обеспечивало возможность выполнения каждой работы.

В целом рассмотренные соотношения (3.2.1)–(3.2.6) составляют формализованное представление модели минимизации времени производства продукции при ограничениях на количество и взаимозаменяемость возобновляемых ресурсов. В основу алгоритма решения задачи (3.2.1)–(3.2.6) минимизации времени производства продукции при ограничениях на количество и взаимозаменяемость возобновляемых ресурсов положена процедура ветвей и границ. Она содержит конечное число шагов и опирается на следующие построения [1]:

а) представление множества $V=\{S\}$ допустимых по ограничениям (3.2.3)–(3.2.6) фрагментов S календарного плана Y в виде дерева подмножеств (ветвление);

б) вычисление для этих подмножеств нижней границы целевой функции (3.2.2);

в) нахождение допустимых вариантов календарного плана;

г) проверка этих вариантов плана на оптимальность.

В рассматриваемой задаче построение дерева вариантов может осуществляться на основе фронтальной или дихотомической схем ветвления [2]. При этом дихотомическая схема, как правило, содержит большее количество итераций до получения оптимального решения. Однако она позволяет строить более эффектные в смысле затрат памяти ЭВМ алгоритмы ветвления. Поэтому далее применяется именно эта схема ветвления. При ее реализации каждая вершина v_s (S-й ветви дерева) представляет собой допустимый по ограничениям (3.2.3)–(3.2.5) фрагмент календарного плана

$$v_s = \{x_s(i,j), r_s(i,j)\}, \qquad (3.3.1а)$$

если (i,j)-я работа начинается в момент $x_s(i,j)$ при $r(i,j)$-м варианте назначения ресурсов;

$$v_S = \varnothing, \qquad (3.3.1б)$$

если (i,j)-я работа при $r(i,j)$-м варианте ресурсов не начинается в момент времени $x_s(i,j)$.

Для каждой ветви $S \in V$ величины $x_s(i,j)$, $(i,j) \in G$ (моменты начала соответствующих работ) должны выбираться из возрастающей последовательности $t_s = \{t_s^\nu\}$, ν=1,2,.... При этом, $t_s^1 = 0$, а последующие моменты t_s^ν, ν=2,3,..., определяются рекуррентным образом по формуле

$$t_s^\nu = \min_{(i,j) \in P_s^{\nu-1}} \{x_s(i,j) + \tau(i,j)\},$$

где $P_s^{\nu-1}$ – множество работ (i, j), ранее включенных в S-ю ветвь и незавершенных к моменту $t_s^{\nu-1}$, т. е.

$$P_s^{\nu-1} = \{(i,j) \,|\, (i,j) \in G,\ x_s(i,j) \le t_s^{\nu-1} < x_s(i,j) + \tau(i,j)\}.$$

Таким образом, t_s представляет собой последовательность моментов времени, в которые завершаются работы, включенные в рассматриваемую ветвь дерева и освобождаются соответствующие возобновляемые ресурсы. При этом условие $t_s^1 = 0$, отражает тот факт, что все варианты расписаний начинаются в момент времени 0.

Установление сроков начала работ не в соответствии с указанными последовательностями не позволяет сократить время реализации производственного процесса. Действительно, для любого варианта календарного плана Y, содержащего фрагмент S, ранний срок начала любой работы $(i,j) \in S$ принадлежит последовательности t_s по определению. Следовательно, и поздние сроки начала работ, лежащих на критических для плана производственного процесса Y путях, также принадлежат этой последовательности. Для работ, не принадлежащих критическим путям, возможна вариация сроков начала в пределах соответствующих резервов времени. Вместе с тем границы этих резервов также принадлежат указанной последовательности, а вариация внутри границ не позволяет сократить время выполнения комплекса работ в целом. Таким образом, сроки начала работ оптимального по критерию (3.2.2) плана производственного процесса Y должны принадлежать соответствующей этому плану последовательности t_s.

Введем в рассмотрение множество $\hat{R} = \{r^\xi(i,j) \,|\, (i,j) \in G, \xi = 1,2,...\}$ всех возможных вариантов назначения имеющихся возобновляемых ресурсов для соответствующих работ и связанное с ним множество $D = \{d_\xi \,|\, \xi = 1,2,...\}$, такое, что:

d_ξ=1, если для выполнения (i,j)-й работы используется вариант $r^\xi(i,j)$ назначения рассматриваемых ресурсов,

d_ξ=0 в противном случае.

Тогда порядковый номер ξ элемента d_ξ множества D характеризует выполняемую работу и вариант назначения ресурсов для ее выполнения.

При этом процесс ветвления заключается в выборе для каждого момента t_s^ν допустимых переменных d_ξ, ξ = 1, 2,..., и установлении их значений, т. е. (3.2.7) принимает вид:

$v_s = t_s^v, d_\xi = 1$, если соответствующая переменной d_ξ работа $(i,j) \in G$ начинается в момент $x_s(i,j) = t_s^v$ при варианте $r^\xi(i, j)$ назначения ресурсов;

$v_s = t_s^v, d_\xi = 0$, если эта работа при варианте $r^\xi(i, j)$ назначения ресурсов в момент t_s^v не начинается.

Множество F_s^v переменных d_ξ, ξ=1, 2,..., которые могут быть включены в *S*-й фрагмент календарного плана в момент времени t_s^v (допустимых переменных), содержит величины d_ξ, ξ=1, 2,..., соответствующие ранее не включенным в *S* работам $(i,j) \in G$, для которых

$$x_s(l,i) + \tau(l,i) \le t_s^v, \quad (l,i) \in G, \tag{3.3.2а}$$

$$n(i, j) \le h^v(i, j), \quad (i, j) \in G, \quad \nu = 1, 2, ..., \tag{3.3.2б}$$

где

$$h_s^v(i, j) - \sum_{k \in R_s^v} \delta^k(i, j),$$

R_s^v – множество свободных возобновляемых ресурсов для *S*-го фрагмента плана в момент времени t_s^v.

Первое из этих условий определяет работы, для которых к моменту t_s^v выполнены все предшествующие, а второе выделяет те из них, для которых имеются свободные ресурсы требуемого вида.

В качестве оценки W_s нижней границы целевой функции (3.2.2) для каждого фрагмента *S* календарного плана может быть принята максимальная продолжительность пути из начальной вершины графа *G* в конечную, определяемая без учета ресурсных ограничений (3.2.4), (3.2.5) для работ, не включенных в *S*. При этом, если на очередном, соответствующем моменту t_s^v, шаге ветвления устанавливается $d_\xi^0 = 1$, то для определения $W_s(d_\xi^0 = 1)$ полагается следующее:

а) работы $(i, j) \in G$, ранее вошедшие в *S*-й фрагмент расписания (т. е. работы, для которых $x(i,j) < t_s^v$), начинаются в соответствующие моменты $x_s(i,j)$;

б) для работы (i^0,j^0), соответствующей переменной $d_\xi^0 \in F_s^v$ и, следовательно, включаемой на рассматриваемом шаге и *S*-ю ветвь дерева вариантов $x(i^0,j^0) = t_s^v$;

в) для работ $(i,j) \in G$, соответствующих переменным $d_\xi \in F_s^v$, которые по ресурсному ограничению (3.1.9б) в момент t_s^v не могут быть включены в план одновременно с работой (i^0, j^0)

$x_s(i, j) = t_s^{v+1}$.

Если же на рассматриваемом шаге ветвления устанавливается $d_\xi^0 = 0$, то для определения $W_s(d_\xi^0 = 0)$ полагается следующее:

а) работы $(i,j)\in G$, ранее вошедшие в S-й фрагмент календарного плана, начинаются в соответствующие моменты $x_s(i,j)$;

б) для работы (i^0,j^0), соответствующей переменной d_ξ^0, – в момент $x_s(i^0,j^0)=\mathrm{t}_s^{v+1}$;

в) для остальных работ $(i,j)\in G$, соответствующих переменным $\mathrm{d}_\xi\in \mathrm{F}_s^v$, – в момент $x_s(i,j)=\mathrm{t}_s^v$.

Важным элементом рассматриваемого метода решения задачи (3.2.1) – (3.2.6), существенно влияющим на его сходимость, является способ выбора очередной работы и варианта назначения для нее ресурсов. Формально он состоит в выборе переменных $\mathrm{d}_\xi\in \mathrm{F}_s^v$ для включения в S-ю ветвь в момент времени t_s^v. В предлагаемом методе выбор d_ξ^0 на очередном шаге ветвления осуществляется в два этапа: на первом выбирается работа, а на втором – вариант назначения ресурсов. Выбор очередной работы осуществляется в соответствии со следующей последовательностью предпочтений:

$$\min \mathrm{T}_j^{(n)} \to \max \tau(\mathrm{i},\mathrm{j})\mathrm{n}(\mathrm{i},\mathrm{j}) \to \min \mathrm{i} \to \min \mathrm{j},$$

т.е. первой в расписание включается работа, которой соответствует меньший поздний срок окончания $\mathrm{T}_j^{(n)}$. Если таких работ несколько, то из них выбирается работа максимального объема. Если и таких работ несколько, то выбирается работа с наименьшими номерами *i, j*. При этом поздние сроки окончания должны определяться с учетом рассматриваемого фрагмента *S* расписания.

Вариант $\mathrm{r}(\mathrm{i}^0,\mathrm{j}^0)$ назначения ресурсов для выбранной работы (i^0,j^0) определяется из условия минимума величины

$$\mathrm{Z}=\sum_{k\in r(i^0,j^0)}\ \sum_{(i,j)\notin S}\delta^k(\mathrm{i},\mathrm{j}),$$

т. е. назначаются наименее универсальные для оставшихся работ $(\mathrm{i},\mathrm{j})\notin \mathrm{S}$ ресурсы.

Выбранная таким образом работа $(\mathrm{i}^0,\mathrm{j}^0)$ и вариант $\mathrm{r}(\mathrm{i}^0,\mathrm{j}^0)$ назначения ресурсов однозначно определяют очередную переменную d_ξ^0, включаемую в S-ю ветвь дерева вариантов в момент t_s^v.

Обход дерева организуется в соответствии с правилом «иди вправо». Это позволяет хранить в памяти ЭВМ при решении задачи только текущий фрагмент расписания, наименьшее из полученных ранее значений целевой функции и соответствующее ему допустимое расписание. Указанное правило в сочетании с рассмотренным способом выбора работ и типов ресурсов составляет приближенный алгоритм решения задачи (3.2.1)–(3.2.6) минимизации времени производства продукции при ограничениях на количество и взаимозаменяемость возобновляемых ресурсов. Он позволяет получить первое допустимое решение за конечное число шагов, равное количеству *N* работ в сети *G*.

Каждая *S*-я ветвь заканчивается, если в нее вошли все *N* работ, т. е. получен допустимый календарный план *Y*, или если

$$\mathrm{W}_s \ge \mathrm{T}^0(1-\mu), \quad 0\le \mu \le 1, \tag{3.3.3}$$

где T^0 – наименьшее значение целевой функции (3.3.3) для ранее полученных допустимых решений (рекорд); μ – заданное допустимое отклонение целевой функции (3.3.3) от оптимального (точность оптимизации). Выполнение условия (3.3.3) означает, что на текущей ветви улучшить ранее полученный рекорд нельзя и ее продолжение не имеет смысла.

Процедура поиска решения заканчивается, если для всех оставшихся ветвей выполняется условие (3.3.3). Последний рекорд является искомым оптимальным значением целевой функции

(3.3.3), а соответствующий ему допустимый календарный план – оптимальным планом, обеспечивающим минимизацию времени производства продукции при ограничениях на количество и взаимозаменяемость возобновляемых ресурсов.

Библиографический список

1. Алексеев, О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации / О. Г. Алексеев. – М. : Наука, 1987. – 248 с.
2. Бабаев, А. А. Прикладные модели ресурсно-временной оптимизации: монография / А. А. Бабаев. – СПб. : МБИ, 2012. – 252 с.
3. Ярощук, А. Б. Особенности венчурного инвестирования в современных условиях /А. Б. Ярощук // Вестник Университета Российской академии образования. – 2015. – № 1. – С. 131–137.