УДК 338.5

Л.М. Путятина
Н.В. Тарасова
Ю.М. Богатов

УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ МОЩНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация. *Авторами статьи сформулирована задача оптимального управления производственной мощностью предприятия. Решение данной задачи показано через соотношения, выражающие необходимые условия сильного экстремума для неклассической вариационной задачи оптимального управления. С помощью представленной методики можно оценить объем производства технологически подобной продукции для достижения максимальной прибыли при условии определенных технико-экономических ограничений и учете изменения во времени цен и себестоимости выпускаемой продукции.*
Ключевые слова: *задача оптимального управления, производственная мощность, методы математического программирования.*

Ludmila Putyatina
Natalya Tarasova
Yury Bogatov

MANAGEMENT OF THE PRODUCTION CAPACITY OF THE ENTERPRISE ON THE BASIS OF METHODS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING

Annotation. *Authors of article have formulated a problem of optimum control of the production capacity of the enterprise. The solution of this task is shown through the ratios expressing necessary conditions of a strong extremum for a nonclassical variation problem of optimum control. By means of the presented technique it is possible to estimate the output of technologically similar production for achievement of the maximum profit on condition of certain technical and economic restrictions and the accounting of change in time of the prices and prime cost of products.*
Keywords: *problem of optimum control, production capacity, methods of mathematical programming.*

Задачи оптимального управления, благодаря их типичности, часто встречаются в литературе, посвященной теории оптимальных процессов и относятся к различным областям: технике, экономике, экологии и др. Постановка задачи оптимизации управления производственной мощностью предприятия во времени заключается в определении объемов производства технологически подобной продукции для достижения максимальной прибыли при условии определенных технико-экономических ограничений и учете изменения во времени цен и себестоимости выпускаемой продукции [3]. Пусть предприятие на своей производственной мощности может выпускать товары двух видов i (i=1,2) с объемами N_1 и N_2 в течение времени T. Полную производственную мощность предприятия будем характеризовать относительным показателем $\alpha=1$. Тогда доли мощности, отводимых в момент времени t на выпуск различных товаров обозначим как $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в качестве управляющих параметров, удовлетворяющих неравенству: $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\leq 1$.

Максимальные доли мощности, используемые для выпуска товаров определенного вида? обозначим $\alpha_{I\ max}$. Тогда, если за время T, всей мощности $\alpha=1$ соответствует T_{max} нормо-часов, то максимальное число нормо-часов, соответствующее товару i составит $\alpha_{I\ max}\times T_{max\ при}$ при $\alpha_i(t)=\alpha_{imax}=\text{const}$. При известных нормо-часах для выпуска единицы изделия вида i–T_{0i} , определить максимальный объем выпуска товаров вида i: $N_{imax}=\alpha_{imax}\times T_{max}/T_{0i}$.

Минимальное календарное время T_1 , необходимое для выпуска единицы продукции вида i, определенное при условии, что на предприятии задействованы все производственные мощности, предназначенные для выпуска этого товара, будем рассматривать в качестве показателя, отражающего условную длительность технологического процесса: $T_i=T/N_{imax}$. Параметр T_i назовем календарной длительностью технологического процесса. Производственный процесс будем характеризовать выпуском товаров $N_1(t)$ и $N_2(t)$, т.е. количеством (в шт.) произведенных товаров к моменту времени t.

Очевидно, что скорости выпуска товаров $\frac{dN_i}{dt}$ прямо пропорциональны долям производственных мощностей α_i и обратно пропорциональны календарным длительностям технологического цикла, т.е.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dN_1}{dt} = \dfrac{a_1(t)}{T_1} \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \dfrac{a_2(t)}{T_2} \end{array}\right\}$$

Приведенные дифференциальные уравнения должны решаться при нулевых начальных условиях ($t = 0$, $N_1=0$ и $N_2=0$).

Управление производственными мощностями должно осуществляться таким образом, чтобы интегральная прибыль на рассматриваемом отрезке времени T была бы максимальной. Прибыль предприятия П(t) определяется как разность между доходом от реализации товаров Q(t) и суммарной себестоимостью товаров C(t), т.е.

$$П(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[Q_i(t) - C_i(t)\right]$$

В свою очередь себестоимость производства товаров содержит постоянную $З_{oi}$ составляющую, не зависящую от объемов выпуска и переменную, которая зависит от объемов выпуска. Если цену товара рассматривать как функцию времени $Ц_i(t)$, то доход к текущему моменту времени t определяется в виде:

$$Q(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\cdot dN_i(t)$$

или с учетом уравнений, описывающих изменение выпуска товаров во времени:

$$Q(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\cdot \frac{a_i(t)}{T_i} dt\,,$$

Общие постоянные затраты $З_o$ разделим по различным видам продукции пропорционально календарным длительностям технологического процесса.

$$З_{oi} = З_o \frac{T_i}{T_1+T_2} \qquad (i = 1,2)$$

Далее, будем полагать, что постоянные затраты во времени возрастают по линейному закону:

$$З_{oi}(t) = З_o \frac{T_i}{T_1+T_2} \cdot \frac{1}{T} \cdot t$$

Если изменение во времени долей переменных затрат обозначить $З_{ni}(t)$, то суммарная себестоимость к текущему моменту времени t определяется [1]:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\, dN_i(t)\right] \text{или } C(t) = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\, dt\right].$$

Таким образом, прибыль предприятия, зависящая от управляемых производственных мощностей $\alpha_i(t)$ определяется выражением:

$$\Pi(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\,dt - \sum_{i=1}^{2}\left[З_{oi}(t) + \int_0^t З_{ni}(t)\frac{a_i(t)}{T_i}\,dt\right]$$

Прибыль будем рассматривать в качестве критерия оптимального управления производственной мощностью. Ограничения, накладываемые на управления долями мощности, определяются неравенством: $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\le 1$. При заданной доли мощности, например $\alpha_1(t)$, можно определить максимальное значение другой доли $\alpha_2(t)$. В этом анализе может быть определена функциональная связь $\alpha_2=\xi(\alpha_1)$, ограничивающая максимальные или предельные возможности предприятия и определяющая ограничения на управляющие воздействия (с учетом функциональной связи между ними). Предположим, что эта зависимость может быть аппроксимирована многочленом второй степени: $\alpha_2(t)=b_0+b_1\,\alpha_1(t)+b_2[\alpha_1(t)]^2$. Задача оптимального управления производственной мощностью формулируется следующим образом: для предприятия, выпуск товаров которых описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \frac{a_1(t)}{T_1}, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \frac{a_2(t)}{T_2}, \end{aligned}\right\} \text{ где } N_1 = N_2 = 0, \text{ при } t = 0,$$

определить управления $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, удовлетворяющие уравнению ограничения:$\varphi(\alpha_1, \alpha_2)=0$ и доставляющие максимум критерию $\Pi(t)$. Решить задачу оптимального управления мощностью следующим образом [2]. Введем новую переменную: $N_3(t)=\Pi(t)$. Дополнительное уравнение:

$$\frac{dN_3}{dt} = \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} - \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{dЗ_{oi}(t)}{dt} + З_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i}\right]$$

Начальное условие: $t = 0,\ N_3(0) = -\sum_{i=1}^{2} З_{oi}(0)$. Так как ограничения на конечные значения выпуска продукции не накладываются, то критерий оптимальности: $\pi=N_3(t_k)$. В соответствии с принципом максимума вектор управления $\overline{\alpha}\,\left[\alpha_1(t),\ \alpha_2(t)\right]$ будет оптимальным и критерий $\pi(t)$ будет принимать максимальное значение на всем интервале управления $[0,t_k]$ при условии, что функция Гамильтона – $H\left[\overline{\alpha},\ \overline{N}\right]$ на всем интервале управления будет принимать минимальное значение:

$$H = \sum_{i=1}^{3}\Psi_i f_i = \Psi_1\frac{\alpha_1(t)}{T_1} + \Psi_2\frac{\alpha_2(t)}{T_2} + \Psi_3\left\{\sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} - \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{dЗ_{oi}(t)}{dt} + З_{ni}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i}\right]\right\},$$

где f_i – правые части основных и дополнительного дифференциальных уравнений; Ψ_I – присоединенные функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям вида:

$$\dot{\Psi}_i = -\sum_{j=1}^{3}\Psi_j\frac{df_j}{dN_i},\quad i = 1,2,3.$$

Дифференциальные уравнения решаются при заданных конечных условиях: $\Psi_i(t) = -\frac{d\pi}{dN_i}$, $i = 1,\ldots 3$. Подставляя выражения для f_j и π, получим:

$$\dot{\Psi}_1 = -\Psi_1 \cdot 0 - \Psi_2 \cdot 0 - \Psi_3 \cdot 0 = 0$$
$$\dot{\Psi}_2 = -\Psi_1 \cdot 0 - \Psi_2 \cdot 0 - \Psi_3 \cdot 0 = 0$$
$$\dot{\Psi}_3 = 0$$

Следовательно функции $\Psi_i(t)$ принимают стационарные значения, которые могут быть определены из конечных условий: $\Psi_1(t_к)=0$, $\Psi_2(t_к)=0$, $\Psi_3(t_к)=-1$. С учетом выражения Ψ_i (i=1, ... 3) функция Гамильтона преобразуется к виду:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{n\,i}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} + \frac{dЗ_{o\,i}(t)}{d\,t}\right] - \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i}$$

Подставляя выражения для $З_{o\,i}(t) = З_o \dfrac{T_i}{T_1 + T_2} \cdot \dfrac{1}{T} \cdot t$ получим:

$$H = \sum_{i=1}^{2}\left[З_{n\,i}(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} + \frac{З_o T_i}{(T_1 + T_2)\cdot T}\right] - \sum_{i=1}^{2} Ц_i(t)\frac{\alpha_i(t)}{T_i} = =\beta_0+\beta_1(t)\alpha_1(t)+\beta_2(t)\alpha_2(t)$$, где

$$\beta_0 = \frac{З_o T_i}{(T_1 + T_2)T};\ \beta_i(t) = \frac{З_{ni}(t) - Ц_i(t)}{T_i},\ i = 1,2$$

Поскольку $Ц_i(t)>З_{ni}(t)$, то $\beta_i(t)<0$ и функция Гамильтона принимает минимальные значения при max $|H|$. Определим условный экстремум H, при условии, что $\overline{\alpha}$ удовлетворяет уравнению: $\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=0$. Условный экстремум функции H соответствует безусловному экстремуму функции Лагранжа: $L=\beta_0+\beta_1(t)\,\alpha_1(t)+\beta_2(t)\alpha_2(t)+\lambda\varphi(\alpha_1,\alpha_2)$, где λ – неопределенный множитель.

Значения переменных α_1, α_2, λ доставляющих экстремум H определяются из условий равенства нулю частных производных:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{d\alpha_1} = \beta_1(t) + \lambda\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = 0\\
&\frac{dL}{d\alpha_2} = \beta_2(t) + \lambda\frac{d\varphi}{d\alpha_2} = 0\\
&\frac{dL}{d\lambda} = \varphi(\alpha_1,\alpha_2) = 0
\end{aligned}\right\}$$

Библиографический список

1. Мищенко, А. В. Динамическая задача определения оптимальной производственной программы / А. В. Мищенко, Е. В. Джамай // Менеджмент в России и за рубежом. – 2002. – № 2. – С. 86–90.
2. Путятин, А. Е. Оптимизация управления производственными мощностями предприятия на основе принципа максимума Понтрягина / А. Е. Путятин // Труды вольного экономического общества России. – 2006. – Т. 74. – С. 279–285.
3. Путятина, Л. М. Основные аспекты разработки товарной политики машиностроительного предприятия как важного элемента его стратегии / Л. М. Путятина, Е. В. Джамай, Л. А. Лаврова // Вестник Московского государственного областного университета. – 2015. – № 1. – С. 58–61.