
ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИЙ

УДК 330.4 (075)

Ю.И. Аганин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДУОПОЛИИ

Аннотация. Рассмотрены задачи максимизации прибыли за счет оптимального распределения ресурсов в трех динамических моделях дуополии. Сначала строится модель, которая характеризует оптимальный выпуск продукции, фондовооруженность труда в конкурирующих фирмах при равновесии спроса и предложения. Затем оптимизация выпуска происходит при неравновесной цене, и в третьей модели учитывается возможность оптимального использования кредита.

Ключевые слова: оптимальное управление инвестициями, оптимальное использование кредитов, дуополия, прибыль, оптимизация.

Yuri Aganin

OPTIMAL CONTROL OF INVESTMENTS IN A DYNAMIC MODELS OF DUOPOLY

Annotation. The paper studies profit maximization in three dynamic models of duopoly. The first one describes the dynamics of production and capital-labor ratio with equilibrium price, the second – the same problem with non-equilibrium price and the third one analyzes the optimal external financing of capital expenditures and working capital.

Keywords: optimal control of investments, optimal external financing, duopoly, profit, optimization.

Оптимальное управление производством в современных условиях предполагает разработку количественных средств анализа динамики развития конкурентной среды, и в частности, динамики дуополии. В отличие от задач оптимального управления в моделях монополии, где рассматривался единственный скалярный критерий максимума прибыли, в динамических моделях дуополии мы рассматриваем соответствующие задачи с векторным критерием и методику их приближенного решения. Приводимые ниже обозначения переменных и допущения, в основном, соответствуют принятым обозначениям и предположениям в статье автора [2].

1. Оптимальное управление в равновесной модели дуополии.

2. Обозначения переменных и основные допущения модели:

1) известен спрос D в момент времени t календарного периода $0 \leq t \leq T$ на продукцию $Y_1(t) > 0; Y_2(t) > 0$ конкурирующих фирм в количестве $D = Y_1(t) + Y_2(t)$ единиц;

2) функция полных издержек C_i каждой фирмы – квадратичная функция выпуска $C_i = m_i Y_i^2 + n_i Y_i + c_i$ с положительными параметрами m_i, n_i, c_i . Здесь и далее $i = 1, 2$;

3) объем производимой продукции описывается производственной функцией Кобба – Дугласа: $Y_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1$, где $K_i = K_i(t)$ – затраты капитала; $L_i = L_i(t)$ – затраты труда; A_i – положительный параметр; α_i – коэффициент эластичности выпуска по капиталу [1; 2; 5; 6];

© Аганин Ю.И., 2017

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-06-00280).

4) равновесная цена p ; $p > 0$ задается равенством $p = a - b(Y_1 + Y_2)$, где $a > 0, b > 0$ – параметры. Прибыль каждой фирмы выражается равенством: $\pi_i(Y_1; Y_2) = (a - b(Y_1 + Y_2))Y_i - C_i$;

5) прибыль используется для капитальных вложений $I_i = s_i \pi_i(Y_1; Y_2)$ и для стимулирования труда $S_i = (1 - s_i) \pi_i(Y_1; Y_2)$, $0 \leq s_i \leq 1$. Переменные s_i – свободные параметры (управления);

6) динамика использования трудовых ресурсов задается дифференциальными уравнениями $\dot{L}_i = \lambda_i L_i$, где $\lambda_i = \tau_i(1 - s_i) \pi_i(Y_1, Y_2) - \lambda_{0i} L_i$; точка над переменной величиной – символ производной по времени, положительные параметры τ_i – коэффициенты стимулирования труда; λ_{0i} – коэффициенты, отражающие уменьшение производительности труда при увеличении числа занятых;

7) динамика основных производственных фондов (капитала) K_i задаются дифференциальными уравнениями $\dot{K}_i = I_i - \mu_i K_i$, где μ_i – коэффициент выбытия капитала;

8) динамика фондовооруженности $x_i = K_i / L_i$ описывается уравнениями [1; 2]:

$$\dot{x}_i = \dot{K}_i / L_i - K_i \dot{L}_i / L_i^2 \Rightarrow \dot{x}_i = (s_i \pi_i(Y_1, Y_2) - \mu_i K_i) / L_i - \lambda_i K_i L_i / L_i^2 \Rightarrow \dot{x}_i = s_i \pi_i(Y_1, Y_2) / L_i - (\mu_i + \lambda_i) x_i; \quad (1.1)$$

9) из равенств $\dot{Y}_i = A_i \alpha_i K_i^{\alpha_i - 1} L_i^{1 - \alpha_i} \dot{K}_i + A_i (1 - \alpha_i) K_i^{\alpha_i} L_i^{-\alpha_i} \dot{L}_i$, $i = 1, 2$ получим, учитывая (1.1), систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{x_i}{Y_i} (s_i \cdot \pi_i A_i x_i^{\alpha_i - 1} - (\mu_i + \lambda_i) Y_i); \\ \dot{Y}_i = \alpha_i (s_i \cdot \pi_i A_i x_i^{\alpha_i - 1} - (\mu_i + \lambda_i) Y_i) + \lambda_i Y_i; \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Постановка задачи.

Для системы (1.2) рассматривается задача многокритериальной оптимизации: выбрать ограниченные кусочно-непрерывные управления $s_i(x_1, x_2, Y_1, Y_2)$, $0 \leq s_i \leq 1$ из условия максимума по Парето векторного критерия [3; 4].

$$\bar{\pi} = \left\{ \int_0^T \pi_1(Y_1(t), Y_2(t)) dt; \int_0^T \pi_2(Y_1(t), Y_2(t)) dt \right\} \quad (1.3)$$

Задаются положительные начальные условия $x_i(0) = x_{0i}$, $Y_i(0) = Y_{0i}$. Граничные значения x_i^* фондовооруженности $x_i(T)$, $Y_i^* > 0$ выпуска $Y_i(T)$ – координаты точки покоя (положения равновесия) системы (1.2) при $s_i = \alpha_i$; $\pi_i(Y_1^*, Y_2^*) > 0$. Предлагается Парето – оптимальная стратегия, состоящая в максимизации интегрального критерия:

$$\pi^* = \frac{1}{Y_1^* + Y_2^*} \left(Y_1^* \int_0^T \pi_1(Y_1(t), Y_2(t)) dt + Y_2^* \int_0^T \pi_2(Y_1(t), Y_2(t)) dt \right) \quad (1.4)$$

В этом критерии учитывается долевое участие фирм на конкурентном рынке в положении равновесия.

Многие результаты теории оптимизации связаны с возможностью аналитического решения неоднородных линейных систем [3; 4]. Линеаризация используется для формирования приближенных решений соответствующих нелинейных задач. Пусть система (1.2) имеет точку покоя M^* . В этой точке выполняются условия, обозначенные в системе уравнений (1.5).

$$\begin{cases} \alpha_i \pi_i(Y_1, Y_2) A_i x_i^{\alpha_i-1} - (\mu_i + \lambda_i(x_i, Y_1, Y_2)) Y_i = 0; \\ \tau_i(1-s_i) \pi_i(Y_1, Y_2) = \lambda_{0i} Y_i / A_i x_i^{\alpha_i}; i=1; 2 \end{cases} \quad (1.5)$$

Для вычисления координат точки M^* сначала находим стационарные значения фондовооруженности $x_i^* = \lambda_{0i} \alpha_i / \mu_i \tau_i (1 - \alpha_i)$; $i = 1; 2$. Соответствующие значения выпуска $(Y_1^*; Y_2^*)$ – решение системы алгебраических уравнений (1.5) при найденных $x_i^*, i = 1; 2$. Введем малые отклонения фазовых координат и управляющих параметров от их стационарных значений $\tilde{x}_i = x - x_i^*; \tilde{y}_i = Y - Y_i^*; \tilde{s}_i = s_i - \alpha_i, i = 1; 2$, тогда $\pi_i(Y_1, Y_2) = \pi_i(Y_1^* + \tilde{y}_1, Y_2^* + \tilde{y}_2)$. Обозначим $\pi_i^* = \pi_i(Y_1^*, Y_2^*)$; $\pi'_i = \partial \pi_i / \partial Y_i = a - n_i - 2(b+m)Y_i^* - bY_j^*$, учтем, что $\partial \pi_i / \partial Y_j = -bY_i^*$. Линеаризуем систему (1.2) в окрестности точки M^* :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \frac{\tilde{x}_i}{Y_i^*} F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{s}_i) & i=1; 2; \quad j \neq i \\ \dot{\tilde{y}}_i = \alpha_i F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{s}_i) + \frac{\alpha_i \lambda_{0i} (Y_i^*)^2}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i+1}} \tilde{x}_i - \frac{Y_i^* \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i}} \tilde{y}_i - \tau_i(1-\alpha_i)(Y_i^*)^2 b \tilde{y}_j - \tau_i Y_i^* \pi_i^* \tilde{s}_i, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{где } F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{s}_i) = \left(\frac{\alpha_i(\alpha_i-1)\pi_i^* A_i}{(x_i^*)^{2-\alpha_i}} - \frac{(Y_i^*)^2 \alpha_i \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i+1}} \right) \tilde{x}_i + \left(\frac{\alpha_i \pi'_i A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} - \mu_i - \tau_i(1-\alpha_i) \pi'_i Y_i^* + \frac{Y_i^* \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i}} \right) \tilde{y}_i + \\ + \left(\frac{\alpha_i A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} - \tau_i(1-\alpha_i) Y_i^* \right) (-b Y_i^*) \tilde{y}_j + \left(\frac{A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} + \tau_i Y_i^* \right) \pi_i^* \tilde{s}_i, \quad i=1; 2; \quad j \neq i.$$

Ограниченные кусочно-непрерывные управления $\tilde{s}_i = \tilde{s}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ выбираем из условия максимума интегрального критерия прибыли (1.6), записанного в переменных $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$:

$$\pi^* = \frac{1}{Y_1^* + Y_2^*} \left(Y_1^* \int_0^T \pi_1(Y_1^* + \tilde{y}_1(t), Y_2^* + \tilde{y}_2(t)) dt + Y_2^* \int_0^T \pi_2(Y_1^* + \tilde{y}_1(t), Y_2^* + \tilde{y}_2(t)) dt \right) \quad (1.7)$$

Задачу (1.6) – (1.7) решаем при начальных условиях $\tilde{x}_i(0) = x_{0i} - x_i^*, \tilde{y}_i(0) = Y_{0i} - Y_i^*$ и граничных условиях $\tilde{x}_i(T) = \tilde{y}_i(T) = 0$.

Пример. Если выбраны значения параметров

$$\begin{aligned} A_1 = 1; m_1 = 0,8; n_1 = 10; c_1 = 2000; a = 240; \\ b = 0,2; \mu_1 = 0,2; \alpha_1 = 0,5; \lambda_{01} = 0,2; \tau_1 = 5 \cdot 10^{-5}; \quad A_2 = 2; m_2 = 0,5; n_2 = 10; c_2 = 3250; \\ \mu_2 = 0,3; \alpha_2 = 0,4; \lambda_{02} = 0,3; \tau_2 = 3 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

то координаты одной из точек покоя $M^*(x_1^*; x_2^*; Y_1^*; Y_2^*)$:

$$x_1^* = 10^4; Y_1^* = 100; x_2^* = 10^5; Y_2^* = 150 \quad (1.9)$$

Для значений параметров (1.8) и точки покоя (1.9) система (1.6) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -0,3\tilde{x}_1 - 5\tilde{y}_2 + 12000\tilde{s}_1; \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -0,13\tilde{x}_2 + 38\tilde{y}_1 + 38,8887\tilde{y}_2 + 54166,7\tilde{s}_2; \\ \dot{\tilde{y}}_1 = -5 \cdot 10^{-4} \tilde{x}_1 - 0,2\tilde{y}_1 - 0,075\tilde{y}_2 + 20\tilde{s}_1; \\ \dot{\tilde{y}}_2 = 0,057 \cdot 10^{-3} \tilde{x}_2 - 0,0582\tilde{y}_1 - 0,20167\tilde{y}_2 - 23,75\tilde{s}_2; \end{cases} \quad (1.10)$$

Ее характеристический многочлен $P(\lambda) = \lambda^4 + 0,83167\lambda^3 + 0,24547\lambda^2 + 0,030331\lambda + 0,0016342$ удовлетворяет условию устойчивости Рауса-Гурвица.

Возможна приближенная стратегия, состоящая в минимизации времени достижения точки равновесия Курно и стабилизации этого состояния за счет надлежащего выбора управляющих воздействий [6]. При значениях параметров (1.8) M^* – точка Курно, так как в этой точке выполняются равенства $\partial \pi_i / \partial Y_i = 0$; $i = 1; 2$. В рассматриваемой окрестности точки M^* в линейном приближении управление релейное: величины $\tilde{s}_i$ принимают граничные значения, и после конечного числа переключений система приходит к устойчивому стационарному состоянию M^* , при котором $\tilde{s}_i = 0$, т.е. $s_i = \alpha_i$, $i = 1; 2$.

3. Оптимальное управление в условиях развивающегося рынка.

Рассмотрим модель дуополии, которая учитывает возможное превышение спроса над предложением. Предположим, что в каждый момент времени товар в количестве $Y_{(s)} = Y_1 + Y_2$ поступает на рынок. Спрос $Y_{(D)} = (a - p)/b$ – линейная функция цены p , динамика изменения которой описывается дифференциальным уравнением $\dot{p} = \beta(a - p - b(Y_1 + Y_2))$, где β, a, b – положительные параметры, βb – коэффициент адаптации цены. Предположим, что спрос не меньше предложения: $(a - p)/b \geq Y_1 + Y_2$. Уравнение динамики цены дополняет систему (1.2), описывающую равновесную модель, в которой не рассматривалась возможность отклонения цены от ее равновесного значения. Прибыль π_{ii} – функция аргументов Y_i, p :

$$\pi_{ii}(Y_i, p) = pY_i - m_i Y_i^2 - n_i Y_i - c_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

В отличие от равновесной модели зависимость прибыли каждой фирмы от выпуска конкурента задается неявно, учитывается динамика ценообразования. Динамика затрат труда задается дифференциальным уравнением $\dot{L}_i = \lambda_{ii} L_i$, где $\lambda_{ii} = \lambda_{ii}(x_i, Y_i, p) = (\tau_i(1 - s_i)\pi_{ii}(Y_i, p) - \lambda_{0i} Y_i / A_i x_i^{\alpha_i})$. Таким образом, динамическая модель дуополии в условиях развивающегося рынка описывается пятью дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{x_i}{Y_i} (s_i \cdot \pi_{ii} A_i x_i^{\alpha_i - 1} - (\mu_i + \lambda_{ii}) Y_i); \\ \dot{Y}_i = \alpha_i (s_i \cdot \pi_{ii} A_i x_i^{\alpha_i - 1} - (\mu_i + \lambda_{ii}) Y_i) + \lambda_{ii} Y_i; \\ \dot{p} = \beta(a - p - b(Y_1 + Y_2)); \quad i = 1; 2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для системы (2.2) рассматривается задача многокритериальной оптимизации: выбрать ограниченные кусочно-непрерывные управления $s_i(x_1, x_2, Y_1, Y_2, p)$, $0 \leq s_i \leq 1$ из условия максимума по Парето векторного критерия

$$\bar{\pi}_1 = \left\{ \int_0^T \pi_{11}(Y_1(t), p(t)) dt; \int_0^T \pi_{12}(Y_2(t), p(t)) dt \right\} \quad (2.3)$$

Задаются положительные начальные условия $x_i(0) = x_{0i}$, $Y_i(0) = Y_{0i}$, $p(0) = p_0$; $p_0 < a$ и граничные условия: при $t = T$: $s_i = \alpha_i$; $x_i^* = \alpha_i \lambda_{0i} / \mu_i \tau_i (1 - \alpha_i)$, $i = 1; 2$, $Y_1^* = Y_1(T)$, $Y_2^* = Y_2(T)$, $p^* = p(T) = a - b(Y_1^* + Y_2^*)$. Если выбраны величины параметров (1.8), то при $t = T$; $s_i = \alpha_i$ граничные значения x_1^* ; x_2^* ; Y_1^* ; Y_2^* определены равенствами (1.9). Обозначим точку покоя $M^{**} = (x_1^*; x_2^*; Y_1^*; Y_2^*; p^*)$. Величина прибыли $\pi_{ii}(Y_i, p)$ в точке M^{**} принимает равновесное значение

ние $\pi_{1i}(Y_i^*, p^*) = \pi_i^*$. Введем малые отклонения фазовых координат и управляющих параметров от их стационарных значений $\tilde{x}_i = x - x_i^*$; $\tilde{y}_i = Y - Y_i^*$; $\tilde{p} = p - p^*$; $\tilde{s}_i = s_i - \alpha_i$, $i = 1; 2$. Обозначим: $\pi'_{1i} = \partial \pi_{1i} / \partial Y_i = p^* - 2m_i Y_i^* - n_i$, учтем, что $\partial \pi_{1i} / \partial Y_j = 0$; $\partial \pi_{1i} / \partial p = Y_i^*$. Линеаризуем систему (2.2) в окрестности точки M^{**} при условии $(a - p)/b \geq Y_1 + Y_2$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \frac{x_i^*}{Y_i^*} F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{p}, \tilde{s}_i) & i = 1; 2; \\ \dot{\tilde{y}}_i = \alpha_i F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{p}, \tilde{s}_i) + \frac{\alpha_i \lambda_{0i} (Y_i^*)^2}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i+1}} \tilde{x}_i + \left(\tau_i (1 - \alpha_i) Y_i^* \pi'_{1i} - \frac{Y_i^* \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i}} \right) \tilde{y}_i + \tau_i (1 - \alpha_i) (Y_i^*)^2 \tilde{p} - \tau_i Y_i^* \pi_i^* \tilde{s}_i, \\ \dot{\tilde{p}} = -\beta b (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2), \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$F_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{p}, \tilde{s}_i) = \left(\frac{\alpha_i (\alpha_i - 1) \pi_i^* A_i}{(x_i^*)^{2-\alpha_i}} - \frac{(Y_i^*)^2 \alpha_i \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i+1}} \right) \tilde{x}_i + \left(\frac{\alpha_i \pi'_{1i} A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} - \mu_i - \tau_i (1 - \alpha_i) \pi'_{1i} Y_i^* + \frac{Y_i^* \lambda_{0i}}{A_i (x_i^*)^{\alpha_i}} \right) \tilde{y}_i + \left(\frac{\alpha_i A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} - \tau_i (1 - \alpha_i) Y_i^* \right) Y_i^* \tilde{p} + \left(\frac{A_i}{(x_i^*)^{1-\alpha_i}} + \tau_i Y_i^* \right) \pi_i^* \tilde{s}_i, \quad i = 1; 2.$$

В линейном приближении оптимальный по быстродействию переход к равновесному состоянию в окрестности точки M^{**} осуществляется под воздействием релейного управления: величины $\tilde{s}_i$ принимают граничные значения, и после конечного числа переключений система приходит к стационарному состоянию, при котором $\tilde{s}_i = 0$; $\tilde{p} = 0$, т.е. $s_i = \alpha_i$, $p = p^*$.

4. Оптимальное управление и кредит в условиях развивающегося рынка.

Рассмотрим динамическую модель дуополии, в которой развитие производства i -й фирмы связано с необходимостью привлечения кредита $M_i(T) = \int_0^T z_i(\tau) Y_i(\tau) d\tau$, где $M_i(T)$ – сумма кредита, $z_i(t) Y_i(t)$ – интенсивность использования кредита. Переменные z_i задаются дифференциальными уравнениями $\dot{z}_i = \varepsilon_i z_i \left(\frac{(a - p) Y_i}{b(Y_1 + Y_2)} - \gamma_i Y_i \right)$, $i = 1; 2$, где $\varepsilon_i > 0$ – константы, параметры γ_i учитывают погашение кредита $\gamma_i M_i(T)$, ($\gamma_i > 1$; $(\gamma_i - 1) \cdot 100\%$ – банковский процент, в общем случае $\gamma_1 \neq \gamma_2$). В модели кредитования функция полных издержек задана выражением $C_{1i} = m Y_i^2 + n Y_i + c_i + \gamma_i z_i Y_i$. Поток кредитов $z_i Y_i = s_i z_i Y_i + (1 - s_i) z_i Y_i$ распределяется между капиталом $s_i z_i Y_i$ и трудом $(1 - s_i) z_i Y_i$ в той же пропорции, как прибыль, выражение которой учитывает дополнительные издержки по возврату кредита: $\pi_{2i}(Y_i, z_i, p) = \pi_{1i}(Y_i, p) - \gamma_i z_i Y_i$. Капитальные вложения выражаются равенствами $I_i = s \pi_{2i}(Y_i, z_i, p) + s_i z_i Y_i$, а инвестиции в труд – равенствами $S_{2i} = (1 - s) \pi_{2i}(Y_i, z_i, p) + (1 - s_i) z_i Y_i$. Предполагается, что рост рабочей силы зависит не только от величины выпуска, но и от доли кредита, используемой для стимулирования труда, поэтому изменяются выражения коэффициентов λ_i в уравнениях динамики затрат труда: $\lambda_i = \lambda_{2i}(x_i, Y_i, z_i, p) = \tau_i (1 - s_i) (\pi_{2i}(Y_i, z_i, p) + z_i Y_i) - \lambda_{0i} Y_i / A_i x_i^{\alpha_i}$. Урав-

нение динамики цены $\dot{p} = \beta(a - b(Y_1 + Y_2) + z_1 Y_1 + z_2 Y_2 - p)$ учитывает интенсивность использования кредита: цена растет при увеличении использования кредита. Как и в предыдущей модели, спрос не меньше предложения: $(a - p)/b \geq Y_1 + Y_2$. Динамика рынка описывается системой семи дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{x_i}{Y_i} (s_i \cdot \pi_{2i} A_i x_i^{\alpha-1} - (\mu_i + \lambda_{2i}) Y_i); \\ \dot{Y}_i = \alpha_i (s_i \pi_{1i} A_i x_i^{\alpha-1} - (\mu_i + \lambda_{2i}) Y_i) + \lambda_{2i} Y_i; \\ \dot{z}_i = \varepsilon_i z_i \left(\frac{(a-p)Y_i}{b(Y_1 + Y_2)} - \gamma_i Y_i \right); \\ \dot{p} = \beta(a - b(Y_1 + Y_2) + z_1 Y_1 + z_2 Y_2 - p); \end{cases} \quad i = 1; 2 \quad (3.1)$$

Ставится задача: выбрать кусочно-непрерывные управления $s_i(x_1, x_2, Y_1, Y_2, z_1, z_2, p)$, $i = 1; 2$ из условия максимума по Парето векторного критерия:

$$\bar{\pi}_2 = \left\{ \int_0^T \pi_{21}(Y_1(t), z_1(t), p(t)) dt; \int_0^T \pi_{22}(Y_2(t), z_2(t), p(t)) dt \right\} \quad (3.2)$$

Заданы положительные начальные условия: $x_i(0) = x_{0i}$, $Y_i(0) = Y_{0i}$, $p(0) = p_0$; $p_0 < a$ и граничные условия $x_i^* = \alpha_i \lambda_{0i} / \mu_i \tau_i (1 - \alpha_i)$, $i = 1; 2$, $Y_1^* = Y_1(T)$, $Y_2^* = Y_2(T)$, $p^* = p(T) = a - b(Y_1^* + Y_2^*)$, $p^* > 0$; $z_i^* = z_i(T) = 0$. Если выбраны величины параметров (1.8), то при $t = T$; $s_i = \alpha_i$; $z_i^* = z_i(T) = 0$ граничные значения x_1^* ; x_2^* ; Y_1^* ; Y_2^* определены равенствами (1.9). Обозначим точку покоя $M^\infty = (x_1^*; x_2^*; Y_1^*; Y_2^*; z_1^*; z_2^*; p^*)$. Одна из оптимальных стратегий Парето состоит в максимизации интегрального критерия (1.4), в котором выражения π_1 , π_2 заменены π_{21} , π_{22} .

В линейном приближении оптимальный по быстродействию переход к равновесному состоянию самофинансирования M^∞ осуществляется под воздействием релейного управления: величины $\tilde{s}_i$ принимают граничные значения, и после конечного числа переключений система приходит к равновесному состоянию, при котором $s_i = \alpha_i$; $z_i = 0$; $p = p^*$.

Заключение. Рассмотрены модели дуополии, в которых выпуск каждой фирмы задан производственной функцией Кобба-Дугласа. Поставлена задача оптимального распределения прибыли между трудом и капиталом. Динамика фондовооруженности фирм описывается дифференциальными уравнениями, аналогичными уравнению Солоу [6; 7; 8]. В уравнениях динамики затрат труда учитываются уменьшение производительности труда при увеличении числа занятых, и материальное стимулирование труда. Предложен алгоритм приближенного решения задачи максимизации по Парето векторного критерия прибыли, использующий линеаризацию уравнений динамики и линейную свертку критериев. Сделан вывод о релейном характере управления в малой окрестности состояния равновесия. Приведен пример.

Библиографический список

1. Аганин, Ю. И. Влияние фондовооруженности на устойчивость движения в динамической модели дуополии / Ю. И. Аганин // Вестник Университета (Государственный университет управления). – 2013. – № 16. – С. 120–126.
2. Аганин, Ю. И. Оптимальное управление в динамических моделях монополии / Ю. И. Аганин // Вестник Университета (Государственный университет управления). – 2016. – № 3. – С. 190–194.

3. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М. : Мир, 1967. – 480 с.
4. Вайсборд, Э. М. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э. М. Вайсборд, В. И. Жуковский. – М. : Советское радио, 1980. – 304 с.
5. Лебедев, В. В. Математическое и компьютерное моделирование экономики / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М. : НВТ-Дизайн, 2002. – 256 с.
6. Лебедев, В. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М. : ООО «Тест», 2011. – 336 с.
7. Chiang, Alpha C. Fundamental methods of mathematical economics / Alpha C. Chiang. – 2d ed. – New York : McGraw Hill Book Company, 1974. – P. 784.
8. Shone, R. Economic Dynamics. Phase Diagrams and their Economic Applications / R. Shone. – 2d ed. – Cambridge University Press, 2002. – P. 708.