УДК 316.452 JEL D58 *DOI 10.26425/1816-4277-2018-1-49-53*

Гаврилец Ю.Н.
Тараканова И.В.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ РАВНОВЕСИЯ С ОБЩЕСТВЕННЫМ БЛАГОМ

Аннотация. *В статье приводится один из вариантов математической модели экономических ситуаций с так называемыми коллективными (общественными) благами, потребляемыми несколькими участниками товарного рынка одновременно. Выполнен «ручной» компьютерный анализ модели для случая двух участников на основе использования пакета MATHCAD, позволивший проиллюстрировать некоторую технику «нащупывания» состояния рыночного равновесия. Здесь предполагается, что участники процесса, полагая выбор других равным предыдущему, приходят в итоге к согласованному результату.*

Ключевые слова: *общественные блага, динамика цен, устойчивость, рыночное равновесие, выбор.*

Gavrilets Yury
Tarakanova Iraida

COMPUTER ANALYSIS OF THE UNDERLYING EQUILIBRIUM MODELS WITH PUBLIC GOOD

Annotation. *This article discusses an option of the mathematical model of economic situations with public goods consumed by several market participants simultaneously. Computer analysis of this model was performed by using the MATHCAD package which allows toillustrate some techniques of determining of market balance. It was assumed that the participants, considering the choice of the other is equal to their previous decision, comes to the agreed result in finish.*

Key words*: public goods, price dynamics, stability, market equilibrium, choice.*

В статьеприводится несколько вариантов простых моделей экономических ситуаций с так называемыми коллективными благами, потребляемыми сразу несколькими различными участниками рынка. Сама проблема теоретически изучена довольно обстоятельно [3]. Имеются работы в направлении анализа «социальных дилемм» и попыток практических приложений в экспериментальной экономике [2; 4]. В проблеме коллективных благ надо видеть не только факт взаимодействия участников, но также их сотрудничество, поскольку все «игроки» совместно добиваются желаемого результата [1; 6]. Кроме общего обсуждения проблемы, мы хотим также проиллюстрировать некоторую технику «нащупывания» рыночного равновесия, когда участники, полагая выбор других равным предыдущему, приходят в итоге к согласованному результату. Сходимость такого процесса обычно означает определенную устойчивость самого состояния равновесия, которое, как правило, не оптимально по Парето. Это будет показано ниже при рассмотрении равновесия и оптимума модели Линдаля [5].

1. Базовая модель с логарифмическими функциями полезности

Алгоритм поддержания равновесия рассмотрим на стандартном примере простейшей модели потребления коллективного блага [7]. Пусть два участника располагают собственным ресурсом в объемах $w1$ и $w2$ и расходуют его на частное потребление ($x1$, $x2 \geq 0$) и вклад ($F1$, $F2 \geq 0$) в общественное благо, так что выполняется баланс:

$$x1+r1\cdot F1 = w1, \qquad x2+r2\cdot F2 = w2, \tag{1}$$

где $x1$, $x2$ – частное потребление; $r1$, $r2$ – цены на создаваемый вклад в коллективное благо; F_1, F_2 – вклады участников в общественное благо.

Целью каждого участника является максимизация собственной функции полезности типа Кобба-Дугласа, зависящей от потребления и частного блага, и общественного:

$$u1 = \ln(x) + a1\cdot \ln(F1+F2) \rightarrow \max \tag{2}$$

$$u2 = \ln(x) + a2\cdot \ln(F1+F2) \rightarrow \max,$$

где $u1$, $u2$ – собственные функции полезности 1-го и 2-го участника, соответственно; $a1$, $a2$ – положительные параметры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-06-00280)

Равновесие предполагает, что каждому участнику известен выбор вклада другого. Выпишем все соотношения задач Лагранжа для оптимизации каждым участником своего выигрыша в условии равновесия. Разрешив их (без ограничения на знаки переменных*)*, получим формулы, которые допускают отрицательность некоторых переменных:

$$F1=\frac{w1\cdot a1}{(1+a1)\cdot r1}-\frac{F2}{1+a1}\ ,\qquad F2=\frac{w2\cdot a2}{(1+a2)\cdot r2}-\frac{F1}{1+a2}\ ,\tag{2^a}$$

$$x1=w1-r1\cdot F2,\qquad\qquad x2=w2-r2\cdot F1.\tag{2^b}$$

Эти формулы представляют собой систему из 4-х линейных уравнений с 4-мя неизвестными, решение которой дает равновесные значения вкладов участников в общественное благо, только если они окажутся неотрицательными и не превосходящими $w1$ и $w2$, соответственно. Поэтому соотношения равновесия записываю так:

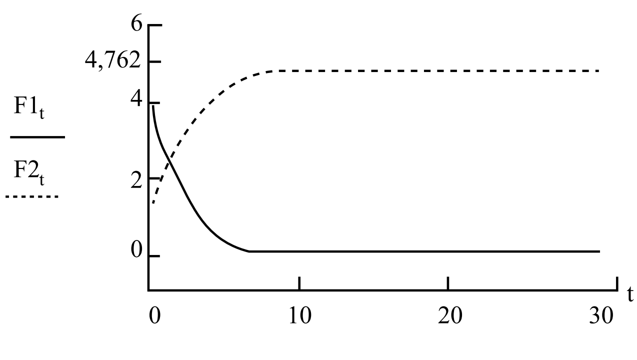
$$F1=\min\left[w1,\max\left(0,\frac{w1\cdot a1-F2\cdot r1}{(1+a1)\cdot r1}\right)\right],\qquad F2=\min\left[w2,\max\left(0,\frac{w2\cdot a2-F1\cdot r2}{(1+a2)\cdot r2}\right)\right],\tag{3}$$

где частные потребления каждого участника $x1$ и $x2$ определяются по формулам (2^b).

Рассмотрим теперь алгоритм последовательного приближения к равновесному состоянию рыночного равновесия. Предполагается ,что в каждый момент времени t = 0, 1, … , 1000, сут. при известном выборе другого каждый участник, естественно, будет делать свой выбор, чтобы максимизировать свою функцию полезности в условиях бюджетного ограничения. Это приводит к следующему итерационному процессу:

$$\begin{cases} x1_{t+1}=\min\left(w1,\dfrac{F2_t\cdot r1+w1}{1+a1}\right)\\ x2_{t+1}=\min\left(w2,\dfrac{F1_t\cdot r2+w2}{1+a2}\right)\\ F1_{t+1}=\min\left[w1,\max\left(0,\dfrac{w1\cdot a1-F2_t\cdot r1}{(1+a1)\cdot r1}\right)\right]\\ F2_{t+1}=\min\left[w2,\max\left(0,\dfrac{w2\cdot a2-F1_t\cdot r2}{(1+a2)\cdot r2}\right)\right],\end{cases}\tag{4}$$

На каждом шаге здесь все переменные выражаются через вклады в общественное благо $F1_{t-1}$, $F2_{t-1}$, сделанные в предыдущий момент времени. Согласно расчетам в модели (4) со временем устанавливается равновесие. На рис. 1 приведены результаты расчетов для некоторого заданного набора параметров модели. Как видим, уже при t=10 и более получаем равновесные значения переменных: $x1_t$=15, $x2_t$=5,833, $F1_t$=0, $F2_t$=4,762. Отметим, что первый участник является здесь «безбилетником», поскольку все свои ресурсы он тратит только на частное потребление ($F1_t$=0 при t>10).



Составлено авторами по результатам расчетов

Рис. 1. Траектории вкладов участников в общественное благо ($F1_t$ – сплошная линия, $F2_t$ – отмечена точками)

2. Устойчивость равновесия модели Линдаля

Рассмотрим однопродуктовую модель с одним производителем и двумя участниками, которые, затрачивая свой труд в условиях рынка, создают частные и коллективные блага. При этом производитель максимизирует прибыль, а участники максимизируют свои функции полезности, учитывая, что расходы не могут превышать их доходы, равные оплате труда. Выполняются балансовые соотношения

$$y - x1 - x2 - F1 - F2 = 0\,, \tag{5}$$

где x_1, x_2 – частное потребление, F_1, F_2 – вклады участников в общественное благо. При этом объем выпуска продукции определяется производственной функцией

$$y = A \cdot l^{\alpha}. \tag{6}$$

где $l = l_1 + l_2$, l_1 и l_2 – затраты труда участников, A и α – положительные параметры.

Интересы участников описываются функциями полезности:

$$\begin{cases} u1 = \ln(x1) + b1 \cdot \ln(T1 - l1) + c1 \cdot \ln(F1 + F2), \\ u2 = \ln(x2) + b2 \cdot \ln(T2 - l2) + c2 \cdot \ln(F1 + F2), \end{cases} \tag{7}$$

где коэффициенты $b1$, $b2$, $c1$, $c2$ соизмеряют полезность «досуга» и общественного блага с полезностью потребления частного блага.

Равновесием модели по Линдалю [5] назовем набор цен p, q, $r1$, $r2$ и переменных выпуска y, труда l, $l1$, $l2$, потребления $x1$, $x2$ и вкладов $F1$, $F2$, обеспечивающих выполнение баланса и максимизацию функций полезности при следующих бюджетных ограничениях:

$$p \cdot x1 + r1 \cdot F1 \le q1 \cdot l1, \qquad p \cdot x2 + r2 \cdot F2 \le q2 \cdot l2$$

где p – цены на производимую продукцию и частные блага (одинаковы для всех участников); $q1$, $q2$ – цены на труд (тоже общие); $r1$, $r2$ – цены на оплату общественного блага (различаются для участников). Прибыль определяют согласно формуле

$$\Pi = P \cdot y - q \cdot (l1 + l2) \to \max, \tag{8}$$

где $y = A \cdot (l1 + l2)^{\alpha}$. Спрос на труд зависит только от его рыночной цены, а трудовой вклад участников производителем не различается.

Далее, необходимо, во-первых, сконструировать итеративную процедуру рыночного взаимодействия участников экономики, обеспечивающую поддержание равновесия. Переменные равновесия должны удовлетворять определенной системе соотношений, в которой величины потребления и трудозатрат выражены через ценовые параметры (p, q) и вклады в общественное благо ($F1+F2$) – из условий Лагранжа задач локальных оптимизаций. Во-вторых, требуется выполнить многовариантные компьютерные расчеты для t=0,.., 1000 по динамической модели, уравнения которой приведены на рис. 2, с различными значениями параметров.

$$\begin{pmatrix} z1_{t+1} \\ z2_{t+1} \\ p_{t+1} \\ q_{t+1} \\ r1_{t+1} \\ r2_{t+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{c1(q_t T1 + r1_t z2_t)}{r1(1+b1+c1)} - z2_t \\ \dfrac{c2(q_t T2 + r2_t z1_t)}{r2(1+b2+c2)} - z1_t \\ p_t \\ q_t \\ r1_t \\ r2_t \end{bmatrix} + H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A\left(\dfrac{q_t}{p_t A\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \dfrac{1}{p_t}\left(\dfrac{q_t T1 + r1_t z2_t}{1+b1+c1} + \dfrac{q_t T2 + r2_t z1_t}{1+b2+c2}\right) + z1_t + z2_t \\ \left(\dfrac{q_t}{p_t A\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - T1 - T2 + \dfrac{b1(q_t T1 + r1_t z2_t)}{q_t(1+b1+c1)} + \dfrac{b2(q_t T2 + r2_t z1_t)}{q_t(1+b2+c2)} \\ \dfrac{c1(q_t T1 + r1_t z2_t)}{r1_t(1+b1+c1)} + \dfrac{q_t T1 + r1_t z2_t}{p_t(1+b1+c1)} + \dfrac{q_t T2 + r2_t z1_t}{p_t(1+b2+c2)} - A\left(\dfrac{q_t}{p_t A\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ \dfrac{c2(q_t T2 + r2_t z1_t)}{r2_t(1+b2+c2)} + \dfrac{q_t T1 + r1_t z2_t}{p_t(1+b1+c1)} + \dfrac{q_t T2 + r2_t z1_t}{p_t(1+b2+c2)} - A\left(\dfrac{q_t}{p_t A\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Уравнения итерационного процесса модифицированной модели Линдаля (здесь z1=F1, z2=F2)

С формальной точки зрения существование равновесия некоторой системы означает только потенциальную возможность этого факта. Реализация же этой возможности подразумевает наличие некоторого динамического процесса, устойчивым стационарным состоянием которого и является равновесие. В случае, когда поведение участников зависит только от внешних (рыночных) факторов и не зависит от действий других участников, соответствующие дифференциальные (или разностные) уравнения непосредственно отражают независимое поведение «игроков». В нашем случае выбор, делаемый другими, неизвестен. Однако можно предположить, что участники располагают информацией о предыдущем выборе других и считают, что чужой выбор не будет меняться. Тогда их поведение становится вполне определенным, так как вклад других участников в общественное благо известен. На этой идее основан алгоритм, который использовался при расчетах. Алгоритм предполагает, что участники в каждый момент *t* выбирают оптимальные значения показателей своего поведения, ориентируясь на текущие цены и предыдущие величины вкладов других. Ценовые параметры (p_t, q_t, $r1_t$, $r2_t$) меняются по рыночным законам «спрос-предложение».

Многовариантные компьютерные расчеты показали, что стационарные состояния решений разностной системы мало отличаются от равновесного решения модели. Фактически данный процесс не столько описывает реальную процедуру рыночного выхода в равновесие, сколько показывает устойчивость стационарного состояния по отношению к незначительным отклонениям. Отметим, что в случае, когда домохозяйства ориентируются на предыдущее поведение остальных участников, на рынке может достигаться равновесие. При естественных ограничениях на начальное состояние переменных модели это рыночное равновесие устойчиво. Этот факт подтверждается в моделях с различным числом участников с использованием не только логарифмических, но и степенных функций полезности. Важно также отметить, что если функция общественного благосостояния соизмеряет полезности участников так, что обеспечивает совпадение цен равновесия и оптимума, то ее уровень возрастает, но объем общественного блага не меняется. Этот факт можно выразить другими словами: использование для равновесия оптимальных цен только уменьшит уровень общественной полезности. Эти особенности модели на условных данных должны учитываться при практическом анализе экономических ситуаций.

Библиографический список

1. Гаврилец Ю. Н. Однопродуктовая модель экономического равновесия с филантропией / Ю. Н. Гаврилец, А. С. Стеблюк // Экономика и математические методы. – 2012. – Том 48. – № 2. – С. 30–39.
2. Галочкин И. В. Социальные предпочтения в экономическом поведении: методы измерения и моделирования / И. В. Галочкин // Экономика и математические методы. – 2010. – Том 46. – № 3. – С. 82–92.
3. Никитин С. А. Моделирование экономики с общественными благами: обзор экспериментов / С. А. Никитин // Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов. Сборник научных трудов под ред. Ю. Н. Гаврильца. – Вып. 6. – М. : ЦЭМИ РАН, 2015. – 80 с.
4. Смит В. Экспериментальная экономика / В. Смит. – Пер. с англ, под научн. ред. Р. М. Нуреева. – М. : ИРИСЭН; Мысль, 2008. – 808 с.
5. Черемных Ю. Н. «Микроэкономика. Продвинутый уровень» / Ю. Н. Черемных. – М. : Инфра-М., 2008. – 844 с.
6. Baron D. P. Corporate Social Responsibility and Social Entrepreneurship // Journal of Economics and Management Strategy. – 2007. – Vol.16. – № 3. – Pp. 683–717.
7. Gavrilets Y. N, Tarakanova I. V Optimality and equilibrium in a single-product economic model with collective good // Montenegrin Journal of Economics. – 2013. – Vol. 9. – № 4. – Pp. 7–20.

References

1. Gavrilets Y. N., Stebluk A. S. Odnoproduktovaya model ekonomicheskogo ravnovesiya s filantropi [*Single-product model of economic equilibrium with philanthropy*] // Ekonomika I matematicheskie metody [*Economics and mathematical methods*], 2012, v. 48, I. 2, pp. 30–39.
2. Galochkin I. V. Socialnie predpochteniya v ekonomicheskom povedenii: metodi izmereniya i modelirovaniya [*Social preferences in economic behavior: methods of measurement and modeling*] // Ekonomika I matematicheskie metody [*Economics and mathematical methods*], 2010, vol. 46, I. 3, pp. 82–92.

3. Nikitin S. A. Modelirovanie ekonomiki s obchestvennimi blagami: obzor eksperimentov [*Modeling of an economy with public goods: a survey of experiments*] // Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie social'no-ehkonomicheskih processov [*Mathematical and Computer Modeling of Socio-Economic Processes. The Collection of Articles ed. by Y.N. Gavrilets*], I. 6. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, 2015. 80 p.
4. Smit V. Eksperimentalnaya ekonomika [*Experimental economy*]. Moscow, Mysl, 2008. 808 p.
5. Cheremnih Y. N. Mikroekonomika. Prodvinutiy uroven [*Microeconomics. Advanced level*]. Moscow, Infra-M, 2008. 844 p.
6. Baron D. P. Corporate Social Responsibility and Social Entrepreneurship // Journal of Economics and Management Strategy, 2007, Vol.16, I. 3, pp. 683–717.
7. Gavrilets Y. N, Tarakanova I. V Optimality and equilibrium in a single-product economic model with collective good // Montenegrin Journal of Economics, 2013, Vol. 9, I. 4, pp. 7–20.