
ФИНАНСЫ И БАНКОВСКОЕ ДЕЛО

УДК 519.254 JEL J39

DOI 10.26425/1816-4277-2018-1-141-148

Лебедев В.В.
Лебедев К.В.

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ ЛОРЕНЦА И ОЦЕНКА ИНДИКАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация. В статье обсуждаются вопросы применения двухпараметрической функции экспоненциального распределения для построения кривой Лоренца и вычисления таких показателей дифференциации населения по доходам, как коэффициент Джини, коэффициент Рейнбоу, коэффициент фондов и др. Показано, что все эти коэффициенты зависят от отношения двух параметров: минимального и среднедушевого денежных доходов населения. Для количественной оценки параметров функции распределения использованы численные методы решения задачи минимизации различных критериев близости теоретической кривой и статистических данных.

Ключевые слова: денежные доходы, население, функция распределения, кривая Лоренца, коэффициент Джини, коэффициент Рейнбоу, коэффициент фондов.

Lebedev Valery
Lebedev Konstantin

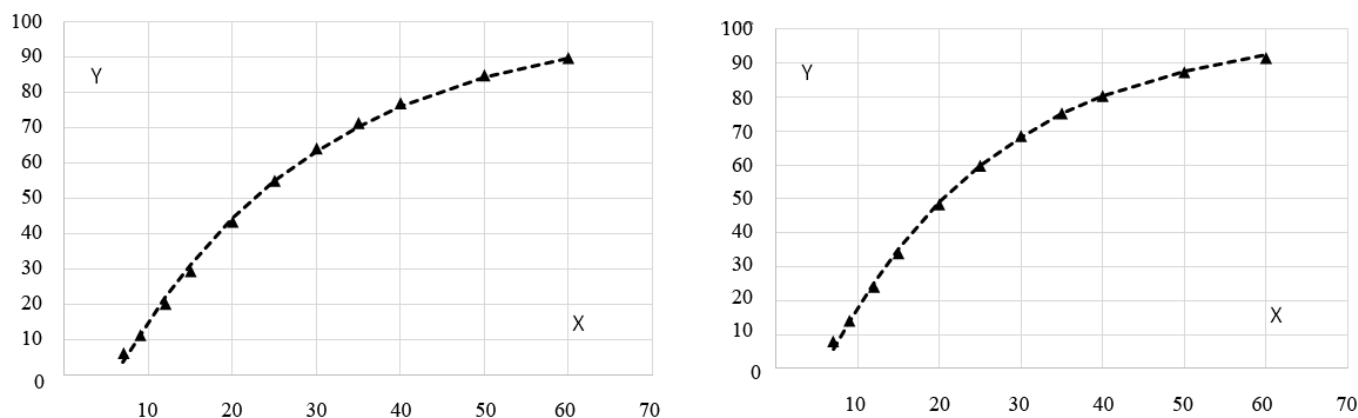
THE CONSTRUCTION OF THE LORENZ CURVE AND ESTIMATION OF INDICATORS OF DIFFERENTIATION OF MONETARY INCOMES OF POPULATION BASED ON EXPONENTIAL DISTRIBUTION

Annotation. The article discusses the use of the two-parameter exponential distribution function to construct the Lorenz curve and to calculate such indicators of differentiation of population by income, as the Gini coefficient, Rainbow coefficient, Funds coefficient etc. It is shown that all these coefficients depend on the ratio of two parameters: the minimum and the average per capita monetary incomes of the population. For a quantitative estimation of the parameters of the distribution function numerical methods of solving the problem of minimization of different criteria of the proximity of theoretical curve and statistical data were used.

Keywords: incomes, population, distribution function, Lorenz curve, Gini coefficient, Rainbow coefficient, Funds coefficient.

Вопросам анализа уровня жизни населения посвящено большое количество работ [1; 2; 4; 5]. Для количественной оценки показателей уровня жизни населения используются различные подходы и источники информации, в том числе данные о распределении населения по величине среднедушевых денежных доходов, ежегодно публикуемых Росстатом [6]. Анализ этой информации осложняется следующими обстоятельствами. Во-первых, исходной относительной точностью статистических данных, которые получают на основе выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств и макроэкономического показателя денежных доходов населения. Вторая причина неточности числовых показателей дифференциации связана с отсутствием в исходных данных Росстата информации о распределении по доходам как малообеспеченных, так и высокообеспеченных групп населения. Методик прямого измерения доходов в этих диапазонах не существует [4]. Поэтому значения индикаторов дифференциации населения России

по денежным доходам существенно зависят от выбора той или иной гипотезы о распределении как низкодоходных, так и высокодоходных групп населения. Сказанное означает, что при исследовании дифференциации населения по доходам используется концепция «мягких» измерений, которая предполагает применение различных подходов к определению числовых значений индикаторов дифференциации и их сравнительный анализ, позволяющий получить обоснованную оценку значений этих индикаторов с некоторой точностью [3].



Подготовлено авторами по материалам исследования

Рис. 1. Распределения населения России по денежным доходам в 2014 г. (слева) и в 2015 г. (справа)

Информация Росстата о распределении населения по величине среднедушевых денежных доходов в месяц может быть приведена в таблице вида $(x_k; y_k)$ [6]. Здесь x_k – значение дохода (в тыс. руб.), y_k – доля населения в %, имеющего денежный доход в месяц ниже уровня x_k , $k = 1, 2, \dots, N$. На рис. 1 треугольниками отмечены точки $(x_k; y_k)$, соответствующие статистическим данным о распределении населения России по среднедушевым денежным доходам в месяц в 2014 г. и 2015 г. Такое распределение населения по доходам характерно для всего периода 2009-2016 гг.

Обычно используемые функции распределения $y = F(x, a_1, \dots, a_m)$ зависят от m параметров $a_1, \dots, a_m$. Для определения параметров теоретической функции распределения требуется решить задачу сглаживания, которая заключается в построении на плоскости Oxy аппроксимирующей кривой, проходящей вблизи таблично заданных точек $(x_k; y_k)$, где $k = 1, 2, \dots, N$. При этом задача аппроксимации решается в некотором классе функций. Так, наиболее часто используемое логнормальное распределение является двухпараметрическим: $y = F(x, \mu, \sigma)$.

Формально задача аппроксимации сводится к минимизации конкретного критерия близости теоретической линии $y = F(x, a_1, \dots, a_m)$ и статистических данных $(x_k; y_k)$, например, суммы квадратов отклонений расчетных значений от табличных:

$$W(a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^N (F(x_k, a_1, \dots, a_m) - y_k)^2. \quad (1)$$

Распределение населения по величине среднедушевых денежных доходов в месяц x по методологии, применяемой Росстатом, описывается двухпараметрическим логарифмически нормальным распределением [1; 4]. Параметрами этого распределения служат математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормального распределения величины $\ln x$.

Для анализа денежных доходов населения применяют и другие подходы, например, трехпараметрическое распределение населения по величине среднедушевых денежных доходов, частным случаем которой является логарифмически нормальное распределение, или логистическое распределение, которое также имеет три параметра [4; 5]. В этой работе предполагается, что функция распределения $y = F(x, x_0, \lambda, a)$ при $x > x_0$ является решением модифицированного дифференциального уравнения Ферхюльста с начальным условием $y(x_0) = 0$. Здесь x_0 , λ и a – положительные параметры.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(1 - y) \left(1 + \frac{y}{a} \right). \quad (2)$$

Использование модели (2) позволило получить формулы для вычисления различных индикаторов дифференциации денежных доходов населения от значений параметров x_0 , λ и a . Количественные оценки показателей дифференциации населения по доходам существенно зависят как от выбора критерия близости теоретической кривой и статистических данных, так и от точности аппроксимации [5]. Согласно выполненным расчетам, несущественное снижение точности может привести к значительному изменению значений индекса Джини, коэффициента фондов и среднемесячного денежного дохода населения. Несмотря на относительную точность, использование модели (2) позволило, тем не менее, «уловить» тенденцию роста среднего месячного денежного дохода населения России в 2009-2016 гг. со среднегодовым темпом прироста около 9 % [5]. Таким образом, этот подход показал свою дееспособность: он может эффективно использоваться при аппроксимации таблично заданных функций, графики которых имеют S-образную форму с горизонтальной асимптотой.

Отметим важное обстоятельство: таблично заданные функции распределения населения по доходам зачастую дают основание принять гипотезу о том, что кривая $y = F(x, a_1, \dots, a_m)$ не имеет точек перегиба. В этом случае в качестве функции распределения можно использовать двухпараметрическую функцию $y = F(x, x_0, h)$, являющуюся при $x > x_0$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{h} \quad (3)$$

с начальным условием $y(x_0) = 0$. Целесообразность перехода от модели логистического распределения (2) к модели (3) определяется тем, что последняя является предельным случаем модели (2) при $h = 1/\lambda$ и $a \rightarrow +\infty$. Выпишем функцию распределения $y = F(x, x_0, h)$:

$$F(x, x_0, h) = \begin{cases} 0, & x < x_0; \\ 1 - e^{-(x-x_0)/h}, & x \geq x_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь параметрами служат x_0 – минимальный уровень денежного дохода населения, и число h – параметр, определяющий скорость роста функции $y = F(x, x_0, h)$. Для сокращения записи в дальнейшем вместо формулы (4) будем писать $F(x) = 1 - e^{-(x-x_0)/h}$, $x \geq x_0$, помня, что при $x < x_0$ значения этой функции равны нулю. Отметим, что это замечание относится ко всем встречающимся в тексте функциям, зависящим от переменной x .

Итак, будем считать, что задача аппроксимации (1) решена, и параметры x_0 и h функции (4), определяющей долю населения, денежный доход которого меньше x , найдены. На рис. 1, кроме статистических данных $(x_k; y_k)$ распределения населения России по величине среднедушевых денежных доходов в месяц в 2014 и 2015 гг. приведены графики соответствующих теоретических функций (4). Здесь параметры экспоненциальной функции распределения (4) получены на основе решения численными методами задачи минимизации среднего квадратического отклонения теоретической кривой от эмпирических точек (для 2014 г. $x_0 = 5,78$ и $h = 21,05$; для 2015 г. $x_0 = 6,12$ и $h = 23,65$).

При найденных значениях параметров x_0 и h функции (4) можно получить несложные расчетные формулы для вычисления среднемесячного денежного дохода населения, коэффициента Джини, коэффициента Рейнбоу, коэффициента фондов и других показателей, характеризующих неравномерность распределения доходов, а также уравнение кривой Лоренца. Для этого построим сначала функцию плотности распределения $f(x) = F'(x)$:

$$f(x) = e^{-(x-x_0)/h} / h, \quad x \geq x_0. \quad (5)$$

Отметим, что в силу уравнения (5) параметр h определяет наклон графика функции (4) при $x = x_0$, т. к. $F'(x_0) = 1/h$. Ниже мы увидим, что параметр h имеет еще одну важную трактовку.

Для дальнейшего изложения удобно ввести еще один параметр: N_0 – общую численность населения. Тогда функция $N(x) = N_0 F(x)$ определяет число жителей, имеющих денежный доход в месяц ниже уровня x . Из сказанного следует, что функция $N_0 G(x)$, где $G(x)$ равна:

$$G(x) = \int_{x_0}^x tf(t)dt, \quad (6)$$

определяет совокупный месячный доход трудящихся, заработная плата которых меньше x . А это значит, что совокупный месячный доход всего населения равен:

$$N_0 G(+\infty) = N_0 \int_{x_0}^{+\infty} tf(t)dt, \quad (7)$$

и поэтому значение среднедушевого месячного дохода населения составит:

$$x_{av} = G(+\infty). \quad (8)$$

Для используемого здесь экспоненциального распределения населения по доходам (4) из формул (5)–(8) следует:

$$G(x) = x_0 + h - (x + h)e^{-(x-x_0)/h}, \quad x \geq x_0; \quad (9)$$

$$x_{av} = x_0 + h. \quad (10)$$

Поэтому, согласно модели (3), среднедушевой доход населения России был равен в 2014 г. 26,83 тыс. руб., а в 2015 г. равен 29,77 тыс. руб.: среднедушевой доход за один год увеличился на 9,88 %.

Итак, в силу (10) параметр h равен разности между среднедушевым денежным доходом всего населения в месяц и его минимальным (расчетным) значением. Вычислим долю населения, которая имеет среднедушевой доход менее x_{av} . Имеем:

$$F(x_{av}) = 1 - 1/e; \quad 0,632. \quad (11)$$

Поэтому в случае экспоненциального распределения по доходам 63,2% населения имеет доход ниже среднедушевого месячного дохода. Обозначим $F(x_{av}) = y_{av}$.

Доля совокупного месячного дохода населения, у которого доход меньше x , в совокупном денежном доходе всего населения составляет

$$H(x) = \frac{N_0 G(x)}{N_0 x_{av}} = \frac{G(x)}{x_{av}}. \quad (12)$$

Для экспоненциального распределения эта функция определяется уравнением

$$H(x) = 1 - \frac{(x + h)e^{-(x-x_0)/h}}{x_0 + h}, \quad x \geq x_0. \quad (13)$$

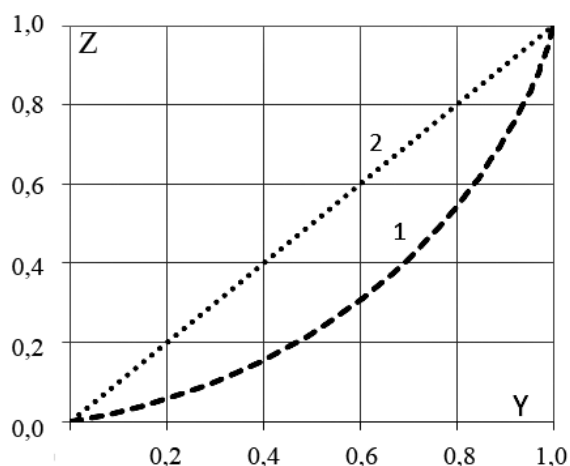
В силу уравнения (13) имеем:

$$H(x_{av}) = 1 - \frac{(x_0 + h + h)e^{-1}}{x_0 + h}, \quad (14)$$

т. е. $H(x_{av}) = 1 - (1 + g)/e$, где $g = h/x_{av}$. Поэтому доля трудящихся, денежный доход которых меньше x_{av} , превосходит долю совокупного месячного дохода этой части населения в совокупном денежном доходе всего населения на величину

$$F(x_{av}) - H(x_{av}) = g/e. \quad (15)$$

Как видим, параметр g содержит важную информацию: из формулы (15) следует, что чем больше значение этого параметра, тем меньшую долю совокупного дохода получают 63,2 % населения, имеющего доход ниже среднедушевого месячного дохода x_{av} . Далее мы увидим, что все используемые показатели дифференциации распределения населения по доходам являются функциями этого параметра. Так как $g = v/(1 + v)$, где $v = h/x_0$, то параметр v естественно назвать базовым параметром дифференциации денежных доходов населения или



Подготовлено авторами по материалам исследования

Рис. 2. Кривая Лоренца (линия 1) и линия «полного равенства» (линия 2)

базовым параметром неравенства. Важно, что этот параметр ν равен отношению двух параметров функции (4), которые находятся из решения соответствующей задачи аппроксимации. При этом в силу неравенства $g'(\nu) > 0$ параметр g возрастает при увеличении параметра ν . Кроме того, $g \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow 0$. Поэтому чем больше расчетное значение базового параметра неравенства ν , тем выше дифференциация населения по доходам. Для данных 2014 г. и 2015 г. имеем: параметр ν равен 3,64 и 3,86; параметр g – 0,785 и 0,794, соответственно. Как видим, приросты параметров ν и g за год составили 5,7 % и 1,13 %, соответственно.

Построим теперь функцию Лоренца $z = L(y)$, которая используется не только для визуализации неравенства в распределении доходов населения, но и для вычисления основных индикаторов дифференциации. Функция Лоренца выражает количественную зависимость накопленной (кумулятивной) доли дохода населения z от соответствующей кумулятивной его доли y .

С формальной точки зрения функция Лоренца – это функция, заданная параметрически следующим образом:

$$\begin{cases} z = H(x), \\ y = F(x), \end{cases} \quad (16)$$

где x – параметр. Из сказанного следует, что

$$z = H(F^{-1}(y)). \quad (17)$$

График функции (17) называют кривой Лоренца (рис. 2). Так как для экспоненциального распределения функция $x = F^{-1}(y)$ принимает вид

$$x = x_0 - h \ln(1 - y), \quad (18)$$

то (после соответствующих преобразований) для функции Лоренца $z = L(y)$ получаем

$$L(y) = \begin{cases} y + g(1 - y) \ln(1 - y), & \text{если } y \in [0, 1); \\ 1, & \text{если } y = 1. \end{cases} \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что отклонение кривой Лоренца от прямой $z = y$ стремится к нулю при $g \rightarrow 0$. Поэтому линию $z = y$ называют линией «полного равенства» (при $g \rightarrow 0$ все население получает доход на уровне x_0 , т. к. в этом случае $h \rightarrow 0$, а $x_{av} \rightarrow x_0$). Найдем максимум отклонения графика функции (17) от прямой $z = y$. Для этого надо решить уравнение $L'(y) = 1$. Так как $L'(y) = 1 - g \ln(1 - y) - g$, то из условия $L'(y) = 1$ следует $\ln(1 - y) = -1$, откуда получаем $y = 1 - e^{-1}$, т. е. $y = y_{av}$. В силу формулы (15) максимум отклонения $y_{av} - L(y_{av}) = F(x_{av}) - H(x_{av}) = g / e$. Отметим также, что $L'(0) = x_0 / x_{av}$, т. е. $L'(0) = 1 - g < 1$. Как видим, «провисание» кривой Лоренца сокращается при уменьшении параметра g и, следовательно, при уменьшении базового

параметра неравенства распределения населения по доходам ν . На рис. 2 построены линия «полного равенства» и кривая Лоренца (19) для 2015 г. (здесь значение параметра $g = 0,794$). Согласно выполненным расчетам, кривые Лоренца для 2014 г. и 2015 г. практически совпадают, т. к. параметры g различались в эти годы всего лишь на 1,13 % (в 2014 г. $g = 0,785$).

Вычислим теперь некоторые индикаторы неравенства распределения населения по доходам. **Коэффициент Джини** KG по определению равен удвоенной площади области, лежащей на рис. 2 между линией «полного равенства» (2) и кривой Лоренца (1). Поэтому

$$KG = 1 - 2 \int_0^1 L(y) dy. \quad (20)$$

Из определения следует, что значение коэффициента Джини изменяется в диапазоне от 0 до 1. При этом чем больше значение коэффициента Джини отличается от нуля, тем в большей степени совокупные доходы распределены неравномерно. Подставив функцию (18) в формулу (19) и вычислив по частям соответствующий несобственный интеграл, для коэффициента Джини получим:

$$KG = g / 2. \quad (21)$$

Коэффициент Рейнбоу определяется следующим образом: $KR = x_{**} / x_*$. Здесь x_{**} – величина такого дохода, который имеют не менее 10 % самых высокообеспеченных членов общества; x_* – величина дохода, менее которого имеют 10 % членов общества с самыми низкими доходами [2]. Поэтому $KR = F^{-1}(0,9) / F^{-1}(0,1)$, т.е. здесь в силу (17) имеем:

$$KR = \frac{1 + g \ln 10}{1 + g \ln(10/9)}. \quad (22)$$

Коэффициент фондов – это отношение среднедушевых доходов 10 % членов общества с самыми высокими доходами к среднедушевым доходам 10 % членов общества с самыми низкими доходами. Поэтому коэффициент фондов определяется по формуле $KF = (1 - L(0,9)) / L(0,1)$. Для экспоненциального распределения (4) в силу формулы (18) следует:

$$KF = \frac{1 + g \ln 10}{1 - 9g \ln(10/9)}. \quad (23)$$

Коэффициент дифференциации удельных полярных доходов KD_a – это отношение среднего денежного дохода двух частей общества. Первая из них имеет денежные доходы выше среднедушевого месячного дохода всего населения, вторая – ниже этого уровня. Поэтому

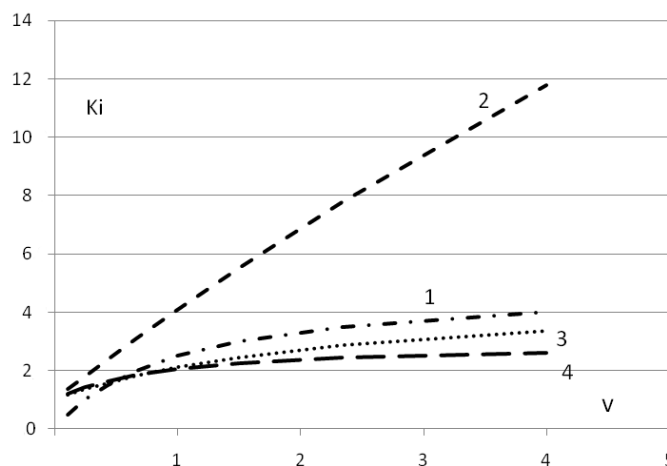
$$KD_a = \frac{1 - H(x_{av})}{1 - F(x_{av})} \cdot \frac{H(x_{av})}{F(x_{av})}.$$

В силу (11) и (15) получаем:

$$KD_a = \frac{(1+g)/e}{1/e} \cdot \frac{1-(1+g)/e}{1-1/e} = \frac{(1+g)(e-1)}{(e-1)-g}. \quad (24)$$

Для данных Росстата 2015 г. рассчитанное выше значение параметра $g = 0,794$. Поэтому коэффициент Джини равен 0,397, коэффициент фондов – 11,47, коэффициент Рейнбоу – 2,61, коэффициент дифференциации удельных полярных доходов KD_a – 3,34. Выше было установлено, что среднедушевой доход в 2015 г. увеличился на 9,88 %. Несмотря на это все значения индикаторов дифференциации увеличились незначительно, т. к. прирост параметра g составил 1,13 %.

На рис. 3 приведены графики полученных выше зависимостей от величины базового параметра неравенства населения ν следующих индикаторов дифференциации населения по доходам: коэффициента Джини (линия 1), коэффициента фондов KF (линия 2), коэффициента дифференциации удельных полярных доходов KD_a (линия 3),



Подготовлено авторами по материалам исследования

Рис. 3. Зависимость индикаторов дифференциации населения от базового параметра $v = h/x_0$

коэффициента Рейнбоу KR (линия 4). Для наглядности коэффициент Джини увеличен здесь в 10 раз (при $v = 4$ коэффициент Джини равен 0,4). Выполненные расчеты этих и других индикаторов дифференциации населения по доходам дают основание сделать следующий вывод: наиболее чувствительными к изменению базового параметра v является коэффициент фондов, а наименее чувствительным – коэффициент Рейнбоу. Так, например, при увеличении параметра v от 3 до 4 (на 33,3 %) коэффициент Джини увеличивается от 0,375 до 0,4 (на 6,7 %), а коэффициент Рейнбоу – от 2,527 до 2,621 (на 3,7 %).

Использованный подход позволил получить не только уравнение функции Лоренца, но и несложные формулы для расчета индикаторов дифференциации населения по доходам. Более того, несмотря на относительную точность, он «уловил» тенденцию роста среднего месячного денежного дохода населения России в течение 2009–2015 гг. со среднегодовым темпом прироста на уровне 9–10 %, что соответствует расчетам на основании использования других подходов. При этом, однако, согласно модели (3) росло и расчетное значение параметра x_0 , вследствие чего значение базового параметра дифференциации населения v в течение этого периода мало отличалось от 4, и, соответственно, значение коэффициента Джини мало отличалось от 0,4.

Библиографический список

1. Айвазян, С. А. Анализ качества и образа жизни населения (эконометрический подход) / С. А. Айвазян. – М. : Наука, 2012. – 402 с.
2. Гречаный, С. А. Коэффициент Рейнбоу и возможности введения прогрессивного налога в России / С. А. Гречаный, В. А. Родин // Вестник ВГУ, Серия «Экономика и управление». – 2008. – № 2. – С. 44–47.
3. Клейнер, Г.Б. Системная экономика, экономическая кибернетика, мягкие измерения и проблемы развития общества / Г. Б. Клейнер // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2017. – № 3. – Том 4 (63). С. 3–7.
4. Колмаков, И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации денежных доходов населения / И. Б. Колмаков. – М. : Институт микроэкономики, 2004. – 168 с.
5. Лебедев, В. В. О применении уравнения Ферхюльста для анализа дифференциации денежных доходов населения России / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев // Экономика и управление: проблемы, решения. – 2017. – № 6. – Том 3 (66). – С. 218–224.
6. Российский статистический ежегодник. 2016: Стат. сб. / Росстат. – М. : 2016 – 725 с.

References

1. Ajvazyan S. A. Analiz kachestva i obraza zhizni naseleniya (ehkonometricheskij podhod) [Analyzing the quality and lifestyle of the population (econometric approach)]. Moscow, Nauka, 2012. 402 p.
2. Grechanyj S. A., Rodin V. A. Koehfficient Rejnbou i vozmozhnosti vvedeniya progressivnogo nalo-ga v Rossii [Rainbow coefficient and the possibility of introducing a progressive tax in Russia]. // Vestnik VGU, Seriya: ehkonomika i upravlenie, 2008, I. 2. pp. 44–47.

3. Klejner G.B. Sistemnaya ehkonomika, ehkonomicheskaya kibernetika, myagkie izmereniya i problemy razvitiya obshchestva [*System Economics, economic Cybernetics, soft measurement and problems of development of society*]. Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya, 2017, I. 3, Vol. 4 (63), pp. 3–7.
4. Kolmakov I.B. Metody i modeli prognozirovaniya pokazatelej differenciacii denezhnyh doho-dov naseleniya [*Methods and models of forecasting of indicators of differentiation of monetary incomes of the population*]. Moscow, Institut mikroehkonomiki, 2004, 168 p.
5. Lebedev V.V., Lebedev K.V. O primenении uravneniya Ferhyul'sta dlya analiza differenciacii de-nezhnyh dohodov naseleniya Rossii [*On the application of the Verhulst equation for the analysis of differentiation of monetary incomes of the population of Russia*] // Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya, 2017, I. 6, Vol. 3 (66), pp. 218–224.
6. Rossijskij statisticheskij ezhegodnik [*Russian statistical Yearbook. 2016*]. Moscow, 2016. 725 p.